# เมตริกซ์ (matrix)

**นิยาม** เมตริกซ์ (matrix) คือกลุ่มของจำนวนกลุ่มหนึ่งที่จัดเรียงกันในรูป สี่เหลี่ยมผืนผ้า และ ปิดล้อมด้วยวงเล็บ ซึ่งเราเรียกจำนวนแต่ละจำนวนสมาชิก (Element หรือ Entry หรือ Component) ของเมตริกซ์ ตัวอย่าง ของเมตริกซ์ เช่น

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & \frac{2}{3} \\ \sqrt{7} & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

สมาชิกของเมตริกซ์จะเป็นจำนวนใดก็ได้ เช่นจำนวนจริง จำนวนเชิงซ้อน บางครั้งอาจจะเป็นเมตริกซ์ หรือถ้าในระดับสูงสมาชิกของเมตริกซ์อาจเป็นสมาชิดของระบบทางพีชคณิตใดๆ ก็ได้ แต่โดยทั่วไปเราจะหมายถึงจำนวนจริงเท่านั้น นอกจากจะระบุเป็นอย่างอื่น การเขียนสัญลักษณ์แสดงเมตริกซ์จะใช้ วงเล็บ [ ] หรือ ( ) แต่ในที่นี้จะใช้วงเล็บ [ ]

ถ้าเมตริกซ์มี m แถวละ n หลัก จะเรียกเมตริกซ์นั้นว่า m x n เมตริกซ์ (m by n matrix) และกล่าวว่าเมตริกซ์นั้นมีมิติ (dimension หรือ order) เท่ากับ m x n เช่น

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

เป็น 3x4 เพราะประกอบด้วย 3 แถว และ 4 หลัก และกล่าวได้ว่าเมตริกซ์นี้มีมิติเท่ากับ 3x4

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

เป็น 2x3 เมตริกซ์และมีมิติเท่ากับ 2x3

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เป็น 2x1 เมตริกซ์และมีมิติเท่ากับ 2x1

**นิยาม** จะเรียกเมตริกซ์ที่มีแถวเดียวว่าเมตริกซ์แถว (row matrix) และเมตริกซ์ที่มีหลักเดียวว่า เมตริกซ์หลัก (column matrix) เช่น

$[0 \quad 1 \quad -2]$ เป็นเมตริกซ์แถว

และ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$ เป็นเมตริกซ์หลัก

โดยทั่วไปจะใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ คือ A , B , C , ...... แทนเมตริกซ์ และอักษรภาษาอังกฤษตัวเล็ก a , b , c , ...... ตามด้วยตัวเลขต่อท้ายหนึ่งตัว หรือ สองตัว โดยเขียนให้ต่ำกว่าตัวอักษรเล็กน้อยแทนสมาชิกของเมตริกซ์ เช่น A เป็น 3x3 เมตริกซ์ จะเขียนแทนด้วย

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

หรือ

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ในกรณีที่ A เป็น mxn เมตริกซ์ใดๆ จะเขียนแทนดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

หรือจะเขียนย่อๆ ว่า $A = [a_{ij}]$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, m$

และ $j = 1, 2, \ldots, m$

**นิยาม** ถ้า A เป็นเมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลักจะเรียก A ว่าเป็นเมตริกซ์จัตุรัส (square matrix) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากับ 2x2 หรืออาจจะกล่าวว่า A มีมิติเท่ากับ 2 (square matrix of order 2)

แนวทแยงหลัก (main diagonal) ของเมตริกซ์จัตุรัส $A = [a_{ij}]_{mxn}$ ประกอบด้วย สมาชิก $a_{ii}$ สำหรับ i ทุกตัว $(i = 1, 2, \ldots, n)$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & \frac{1}{3} & 5 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

แนวทแยงหลักของเมตริกซ์ A ประกอบด้วย $2, -\frac{1}{3}$ และ 9

**นิยาม** ถ้าสมาชิกในแนวทแยงหลักทุกตัวของเมตริกซ์ซึ่งมีมิติเท่ากับ n x n ต่างก็เท่ากับ 1 และสมาชิกตัวอื่นๆ เป็น 0 หมด จะเรียกเมตริกซ์จัตุรัสนั้นว่า เมตริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $I_n$ เช่น

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**นิยาม** จะเรียกเมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็น 0 ว่า เมตริกซ์ศูนย์ (zero matrix หรือ null matrix) สำหรับเมตริกซ์ศูนย์ที่มีมิติเท่ากับ m x n จะเขียนแทนด้วย $\theta_{mxn}$ หรือ $\theta$ เช่น

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ เป็นเมตริกซ์ที่มิติเท่ากับ 2x2

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ เป็นเมตริกซ์ที่มิติเท่ากับ 2x4

**นิยาม** เมตริกซ์สองเมตริกซ์จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เมตริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากัน และสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

อาจให้นิยามการเท่ากันของเมตริกซ์ในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้คือ ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็น mxnเมตริกซ์ และ $B = [b_{ij}]$ เป็น pxq เมตริกซ์ จะกล่าวว่าเมตริกซ์ A และ B เท่ากัน ซึ่งเขียนแทนด้วย A = B ก็ต่อเมื่อ $m = p$ , $n = q$ และ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$

<u>ตัวอย่าง</u>

(1) กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{4} & 2 \\ \frac{6}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $A = B$

(2) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $A \neq B$

(3) กำหนดให้ $E = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ และ $F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $E = F$ ก็ต่อเมื่อ $x = 2$

(4) กำหนดให้ $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $C \neq D$

จากนิยามการเท่ากันของเมตริกซ์จะเห็นว่า คุณสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

ให้ A,B และ C เป็น m x n เมตริกซ์ใดๆ

(1) $A = B$ หรือ $A \neq B$

(2) $A = A$ (คุณสมบัติสะท้อน)

(3) ถ้า $A = B$ จะได้ว่า $B = A$ (คุณสมบัติสมมาตร)

(4) ถ้า $A = B$ และ $B = C$ จะได้ว่า $A = C$ (คุณสมบัติถ่ายทอด)

**นิยาม** ถ้า A เป็นเมตริกซ์ใดๆ เมตริกซ์ใหม่ที่จะได้จากเมตริกซ์ A โดยการเปลี่ยนแถวของเมตริกซ์ A ให้เป็นหลักและเปลี่ยนหลักให้เป็นแถวจะเรียกว่าทรานสโพส (transpose) ของเมตริกซ์ A ซึ่งเขียนแทนด้วย $A^t$ (บางทีอาจเขียน $A'$ หรือ $A^T$) อ่านว่า เอ ทรานสโพส

นั่นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{mxn}$ จะได้ $A^t = [a_{ji}]_{mxn}$ จะพบว่า ถ้า A เป็น mxn เมตริกซ์ $A^t$ ก็จะเป็น nxm เมตริกซ์

เช่น

ถ้า $A = \begin{array}{c} \\ \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

และถ้า $B = [1 \quad 2 \quad -4]$ จะได้ $B^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

**นิยาม** ให้ $A = [a_{ij}]_{mxn}$ และ $B = [b_{ij}]_{mxn}$ ผลบวกของเมตริกซ์ A และ B จะเขียนแทนด้วย A + B จะเป็นเมตริกซ์ที่กำหนดโดย

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn}$$

นั่นคือ สมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมตริกซ์ A + B เท่ากับผลบวกของสมาชิกในแถวที่ i และ หลักที่ j ของเมตริกซ์ A และ B

จากนิยามจะสังเกตเห็นว่าเมตริกซ์สองเมตริกซ์จะบวกกันได้ เมื่อเมตริกซ์ทั้งสองนั้นมีมิติเท่ากัน

ตัวอย่าง

(1) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+7) & (2+0) & (-1+3) \\ (3+6) & (2+5) & (0+8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 9 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

(2) กำหนดให้ $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่าจะหาผลบวกของเมตริกซ์ C และ D ไม่ได้ เพราะเมตริกซ์ C มี มิติเท่ากับ 2x2 แต่เมตริกซ์ D มีมิติเท่ากับ 2x3

**ทฤษฎี 1** กฎการสลับที่สำหรับการบวก

ถ้า A และ B เป็น mxn เมตริกซ์ จะได้ว่า A + B = B + A

พิสูจน์

ให้ $A = [a_{ij}]_{mxn}$ และ $B = [b_{ij}]_{mxn}$

$A + B = [a_{ij}]_{mxn} + [b_{ij}]_{mxn}$

$= [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn}$ นิยาม

$= [b_{ij} + a_{ij}]_{mxn}$ คุณสมบัติการสลับที่ของจำนวนจริง

$= [b_{ij}]_{mxn} + [a_{ij}]_{mxn}$ นิยาม

$= B + A$

**ทฤษฎี** 2 กฎการจัดหมู่สำหรับการบวก

ถ้า A B และ C เป็น mxn เมตริกซ์จะได้ว่า

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

พิสูจน์

ให้ $A = [a_{ij}]_{mxn}$ $B = [b_{ij}]_{mxn}$

และ $C = [c_{ij}]_{mxn}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A + (B + C)$ | $=$ | $[a_{ij}]_{mxn} + ([b_{ij}]_{mxn} + [c_{ij}]_{mxn})$ | |
| | $=$ | $[a_{ij}]_{mxn} + [b_{ij} + c_{ij}]_{mxn}$ | นิยาม |
| | $=$ | $[a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{mxn}$ | นิยาม |
| | $=$ | $[(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{mxn}$ | กฎการจัดหมู่ |
| | $=$ | $[a_{ij} + b_{ij}]_{mxn} + [c_{ij}]_{mxn}$ | นิยาม |
| | $=$ | $(A + B) + C$ | |

<u>หมายเหตุ</u> ถ้าให้ A เป็นเมตริกซ์ใดๆ และ $\theta$ เป็นเมตริกซ์ศูนย์ที่มีมิติเท่ากับเมตริกซ์ A จะได้ว่า

$$A + \theta = A = \theta + A$$

ซึ่งจะเรียก $\theta$ ว่าเป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก (additive identity)

**นิยาม** ให้ $A = [a_{ij}]_{mxn}$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ผลคูณของจำนวนจริง c และ เมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย cA คือ เมตริกซ์ซึ่งกำหนดดังนี้

$$cA = [ca_{ij}]_{mxn}$$

และผลคูณของเมตริกซ์ A และจำนวนจริง c เขียนแทนด้วย Ac คือเมตริกซ์ซึ่งกำหนดดังนี้

$$Ac = [a_{ij}c]_{mxn}$$

จะเรียก (-1)A ว่าเป็นเมตริกซ์ผกผันสำหรับการบวกของ A (additive inverse) ซึ่งโดยทั่วไปจะเขียน

แทน (-1)A ด้วย -A

นั่นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{mxn}$ จะได้ $-A = [-a_{ij}]_{mxn}$

## การคูณเมตริกซ์

**นิยาม** ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times k}$ และ $B = [b_{ij}]_{k \times n}$ ผลคูณของเมตริกซ์ A และ B คือเมตริกซ์ $C = [c_{ij}]_{mxn}$ ซึ่งกำหนดดังนี้ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$

จะสังเกตพบว่าเมตริกซ์ A และ B จะคูณกันได้เมื่อจำนวนหลักของ เมตริกซ์ A เท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์ B

หมายเหตุ $AB \neq BA$

**ทฤษฎี** กฎการจัดหมวดหมู่สำหรับการคูณ

ถ้าเป็น A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ B เป็น $n \times p$ เมตริกซ์ และ C เป็น $p \times q$ เมตริกซ์ จะได้ว่า $(AB)C = A(BC)$

**ทฤษฎี** กฎการกระจาย

(1) ถ้า A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ B และ C เป็น $n \times p$ เมตริกซ์ จะได้ว่า

$$A(B+C) = AB + AC$$

(2) ถ้า A และ B เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ และ C เป็น $n \times p$ เมตริกซ์ จะได้ว่า

$$(A+B)C = AC + BC$$

**ทฤษฎี** ถ้า A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์, B เป็น $n \times p$ เมตริกซ์ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

$$c(AB) = (cA)B = (Ac)B = A(cB)$$

**Algorithm Matrix Multiplication**

**Procedure** Matrix Multiplication (A, B: Matrices)

```
Begin
        for i = 1 to m
          Begin
                for j = 1 to n
                  Begin
                        c_ij = 0
                        For q = 1 to k
                                c_ij = c_ij + a_iq b_qj
                  End
          End
End {C =[ c_ij ] is the product of A and B}
```

## เมตริกซ์ชนิดต่างๆ

**นิยาม** ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกอื่น ที่ไม่ใช่สมาชิกบนแนวทแยงหลักเป็น 0 หมดทุกตัว จะเรียกเมตริกซ์ A ว่า *เมตริกซ์ทแยง (diagonal matrix)* นั่นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{mxp}$ เป็นเมตริกซ์ทแยง จะได้ว่า $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$ สำหรับทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์ทแยง แต่

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ไม่เป็นเมตริกซ์ทแยง

**นิยาม** ถ้าเมตริกซ์ทแยงมีสมาชิกบนแนวทแยงหลักทุกตัวเท่ากัน จะเรียกเมตริกซ์นั้นว่า

สเกลาร์เมตริกซ์ (scalar matrix) จากตัวอย่างข้างต้น B และ $I_3$ เป็นสเกลาร์เมตริกซ์ แต่ A ไม่ใช่สเกลาร์เมตริกซ์

**นิยาม** ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกใต้แนวทแยงหลักเป็น 0 ทุกตัวจะเรียกเมตริกซ์ A ว่า เมตริกซ์เชิงสามเหลี่ยมด้านบน (upper triangular matrix) และถ้าสมาชิกเหนือแนวทแยงหลักของเมตริกซ์ A เป็น 0 ทุกตัว จะเรียกเมตริกซ์ A ว่า เป็นเมตริกซ์เชิงสามเหลี่ยมด้านล่าง (lower triangular matrix)

นั่นคือ $A = [a_{ij}]_{nxn}$ เป็นเมตริกซ์เชิงสามเหลี่ยมด้านบนเมื่อ $a_{ij} = 0$ ถ้า $i > j$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$ และ $a_{ij}$ เป็นเมตริกซ์เชิงสามเหลี่ยมด้านล่าง เมื่อ $a_{ij} =$
0
ถ้า $i < j$ , สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$ เช่น

$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เชิงสามเหลี่ยมด้านบน

$C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เชิงสามเหลี่ยมด้านล่าง

**นิยาม** ถ้า A เป็นเมตริกซ์จุตรัสซึ่งมีคุณสมบัติว่า $A^t = A$ จะเรียก A ว่า เมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)

**นิยาม** ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times k}$ และ $B = [b_{ij}]_{k \times n}$ เป็น Zer0-One เมตริกซ์ Boolean product ของเมตริกซ์ A และ B คือเมตริกซ์ $C = [c_{ij}]_{mxn}$ ซึ่งกำหนดดังนี้

$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$

Boolean product ของเมตริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย $A \Theta B$

**Algorithm The Boolean Product**

**Procedure Boolean Product** (A, B: zero-one matrices)

Begin

for i = 1 to m

Begin

for j = 1 to n

Begin

$c_{ij} = 0$

For q = 1 to k

$c_{ij} = c_{ij} \vee (a_{iq} \wedge b_{qj})$

**End**

End

End {C =[ $c_{ij}$ ] is the boolean product of A and B}

**นิยาม** ให้ A เป็น zero-one เมตริกซ์ที่มีขนาด n x n และ r เป็นจำนวนเต็มบวกเขียนสัญลักษณ์ $A^{[r]}$ แทน boolean product ของ A จำนวน r ครั้ง นั่นคือ

$$A^{[r]} = \underbrace{A \Theta A \Theta A \Theta \ldots \Theta}_{r\ \text{ครั้ง}} A$$

นั่นคือ

$A^{[2]} = A \Theta A$

$A^{[3]} = A^{[2]} \Theta A = A \Theta A \Theta A$

$A^{[4]} = A^{[3]} \Theta A = A \Theta A \Theta A \Theta A$

# Recursive Definition

**บทนำ**

ในบางครั้งเป็นการยากที่จะกำหนดหรือให้ความหมายของสิ่งต่างๆ (objects) อย่างชัดเจน อย่างไรก็ตามเราอาจให้ความหมายของวัตถุหรือสิ่งต่าง ๆในรูปของตัวมันเอง การกำหนดความหมายในรูปแบบที่กล่าวไว้แล้วนี้เรียกว่า recursion เราสามารถใช้ recursion ในการกำหนดความหมายของลำดับ (sequence) ฟังชัน (function) และเซต (set) ตัวอย่างเช่น ลำดับของสองยกกำลังซึ่งเขียนแทนด้วย $a_n = 2^n$ สำหรับ $n = 0, 1, 2, \ldots$ สามารถเขียนใหม่ โดยกำหนดให้พจน์แรกเป็น $a_0 = 1$ และกำหนดพจน์ต่อไปในรูปของพจน์ที่มาก่อนมันดังนี้ $a_{n+1} = 2a_n$ สำหรับ $n = 0, 1, 2, \ldots$

## Recursive Defined Function

กำหนดฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และมีคุณสมบัติดังนี้

1. กำหนดค่าของฟังก์ชันที่ 0
2. ระบุกฎเกณฑ์ในการหาค่าของฟังก์ชั่น ณ ค่าที่เป็นจำนวนเต็มใดๆ ในรูปของฟังก์ชันของจำนวนเต็มที่เล็กกว่า

เราเรียกฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติดังกล่าวว่าฟังก์ชันเรียกตัวเอง (recursive หรือ inductive definition)

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดฟังก์ชัน f แบบเรียกตัวเองดังนี้

$$f(0) = 3$$

$$f(n + 1) = 2f(n) + 3$$

จงหา $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ และ $f(4)$

วิธีทำ

$$f(1) = 2f(0) + 3 =2.3 + 3 = 9$$

$$f(2) = 2f(1) + 3 =2.9 + 3 = 21$$

$$f(3) = 2f(2) + 3 =2.21 + 3 = 45$$

$$f(4) = 2f(3) + 3 =2.45 + 3 = 93$$

ตัวอย่างที่ 2 จงกำหนดนิยามของฟังก์ชัน factorial $F(n) = n!$

แบบเรียกตัวเอง

วิธีทำ

กำหนดค่าของฟังก์ชัน $F$ ที่ 0

จะได้ว่า $F(0) = 0! = 1$

และจากนิยาม $(n+1)! = (n+1)n!$

ดังนั้น $F(n+1) = (n+1)F(n)$

ตัวอย่างที่ 3 จงกำหนดนิยามของฟังก์ชัน $a^n$ แบบเรียกตัวเอง

วิธีทำ กำหนดค่าของฟังก์ชัน $a^n$ ที่ 0

จะได้ว่า $a^0 = 1$

และจาก $a^{n+1} = a.a^n$ สำหรับ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

ตัวอย่างที่ 4 Fibonacci number $f_0, f_1, f_2, \ldots$ กำหนดความหมายดังนี้

$f_0 = 1$, $f_1 = 1$ และ $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ สำหรับ $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ จงหาค่าของ

Fibonacci number $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$

วิธีทำ

$f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$

$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$

$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$

$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$

$f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8$

**Recursive Algorithm**

**DEFINITION** An algorithm is called recursive if it solves a problem
by reducing it to an instance of the same problem with smaller input.

**ALGORITHM 1** A Recursive Algorithm for Computer $a^n$.

Procedure power ( a: nonzero real number, n: nonnegative integer)

If $n = 0$ then power ( a , n ) := 1
Else power ( a , n ) := a * power( a , n - 1 )

**ALGORITHM** 2 A Recursive Algorithm for Computer gcd ( a , b).

**Procedure** power gcd ( a , b: nonnegative integer with a < b )

If $a = 0$ then gcd ( 0 , b ) := 1
Else gcd ( a , b ) := gcd ( b mod a , a )

**ALGORITHM** 3 A Recursive Sequential Search Algorithm

**Procedure** search ( i , j , x )

Begin
If $a_i = x$ then
Location := i
else if $i = j$ then
Location := 0
else
search ( i + 1 , j , x )
End

**ALGORITHM** 4 A Recursive Binary Search Algorithm.

**Procedure** binary search ( x , i , j )

Begin
M := $\lfloor (i + j)/2 \rfloor$
If $x_i = a_m$ then
Location := m
else if ( $x < a_m$ and $i < m$ ) then
binary search ( x , i , m = 1 )

else if ( x > am and j > m ) then

binary search ( x , m + 1, j )

else

Location := 0

End

## RECURSION AND ITERATION

**ALGORITHM 5** A Recursive Procedure for Factorials.

**Procedure** Factorials ( n : positive integer )

Begin

If n = 1 then

Factorials ( n ) := 1

else

Factorials ( n ) := n* Factorials ( n - 1 )

End

**ALGORITHM 5** An Iterative Procedure for Factorials.

**Procedure** Iterative Factorials ( n : positive integer )

Begin

x := 1

for i := 1 to n

x := i * x

End { x is n!}

**ALGORITHM 7** A Recursive Algorithm for Fibonacci Numbers.

**Procedure** Fibonacci ( n : nonnegative integer )

Begin

If n = 0 then Fibonacci (0) := 0

Else if n = 1 then Fibonacci (1) := 1

Else Fibonacci (n) := Fibonacci (n - 1) + Fibonacci (n - 2)

End

**ALGORITHM** 8 An Iterative Algorithm for Computer Fibonacci Numbers.

```
 Procedure Iterative Fibonacci (n : nonnegative integer )
Begin
        If n = 0 then y := 0
        Else
              Begin
                 x := 0
                 y := 1
                 for i := 1 to n - 1
                    Begin
                        z := x + y
                       x := y
                        y := z
                     End
                    End
End {y is the n th Fibonacci Numbers}
```

**หลักการช่องนกพิราบ**

นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันนี ชื่อ ดีริคเลต (Dirichlet) เป็นผู้คิดค้นขึ้นหลักการนี้ได้กล่าวไว้ดังนี้

ถ้า $f : A \rightarrow B$ และ $|A| > |B|$ แล้วจะมี $x, y \in A$ ซึ่ง $x \neq y$ แต่ $f(x) = f(y)$

เทียบเคียงได้ว่า มีช่องใส่จดหมาย $n$ ช่อง และมีจดหมาย $m$ ฉบับ ถ้า $m > n$ แล้วจะมีช่องใส่จดหมาย อย่างน้อย 1 ช่อง ที่มีจดหมายมากกว่า 1 ฉบับ
หลักการนี้อาจกล่าวในรูปแบบอื่น ๆ ได้อีก เช่น

- คน 367 คน จะมีอย่างน้อย 2 คน ที่มีวัน (และเดือน) เกิดเดียวกัน เนื่องจากมีวัน (และเดือน) เกิดต่างกันอยู่ 366 วัน
- สมมติมีคนในกรุงเทพฯ ทั้งหมด 7 ล้านคน ถ้าไม่มีคนใดมีจำนวนเส้นผมเกินกว่า 5 แสนเส้น แล้วต้องมีอย่างน้อย 2 คน ที่มีจำนวนเส้นผมเท่ากัน

หลักการช่องนกพิราบนี้ถึงแม้ว่าฟังดูไม่ฉลาดนัก แต่ก็มีประโยชน์มากในการแก้ปัญหาบางประเภท โดยเฉพาะปัญหาในทฤษฎีจำนวน (Theory of number) ซึ่งจะแสดงตัวอย่างดังต่อไปนี้

**ตัวอย่าง** จงแสดงว่า ถ้ากำหนดจำนวนเต็มให้ 3 จำนวน ต้องมีอย่างน้อย 2 จำนวน ที่มีผลต่างเป็นเลขคู่
**วิธีทำ** จำนวนเต็มที่กำหนด 3 จำนวน จำนวนเต็มแบ่งได้เป็น 2 ภาวะ (parity) คือ คู่กับคี่ ดังนั้นโดยหลักการช่องนกพิราบเลขที่กำหนดให้อย่างน้อย 2 จำนวนมีภาวะเดียวกันและเนื่องจากผลต่างของ 2 จำนวนที่มีภาวะเดียวกันย่อมเป็นเลขคู่ ดังนี้
ผลต่างของเลขคู่ 2 จำนวน คือ $2k - 2m = 2(k - m) = 2t$
ผลต่างของเลขคี่ 2 จำนวน คือ $(2k - 1) - (2m - 1) = 2(k - m) = 2t$
$k, m, t \in \mathbf{Z}$ จึงได้ว่าข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง

**ตัวอย่าง** ให้ $S = \{1,2,\ldots,2n\}, n \in \mathbf{N}$ และ $S' \subseteq S$ ซึ่ง $|S'| = n + 1$
จะต้องมีจำนวนเต็มใน $S'$ อย่างน้อย 2 จำนวน ที่จำนวนหนึ่งหารอีกจำนวนลงตัว
เขียนจำนวนเต็มใน $S'$ ทั้งหมด $n + 1$ จำนวน เป็นผลคูณของ $2^k$ กับเลขคี่ เช่น
$1 = 2^0.1$ , $2 = 2^1.1$ , $3 = 2^0.3$ , $4 = 2^2.1$ , $5 = 2^0.5$ เป็นต้น

เลขคี่ที่ได้มีทั้งหมด $n + 1$ ตัว แต่ละตัวมีค่าระหว่าง 1 ถึง $2n$ แต่เลขคี่ที่มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง $2n$ มีเพียง $n$ ตัว โดยหลักการช่องนกพิราบ จึงได้ว่ามีเลขคี่ที่เป็นผลคูณของ $2^k$ อย่างน้อย 2 ตัวเท่ากัน หรือมีจำนวนเต็มใน $S'$ อย่างน้อย 2 จำนวน ที่มีตัวประกอบร่วม

สมมติว่า $x = 2^i.m$ และ $y = 2^j.m$

ถ้า $i \le j$ แสดงว่า $x$ หาร $y$ ลงตัว

ถ้า $j < i$ แสดงว่า $y$ หาร $x$ ลงตัว

**ตัวอย่าง** เลือกนิสิตคณะวิทยาศาสตร์มา 10 คน จะมีอย่างน้อย 2 คน มีเพื่อนอยู่ในกลุ่มนี้ในจำนวนเท่ากัน

**วิธีทำ** นิสิตแต่ละคนที่เลือกมาจะมีเพื่อนอยู่ในกลุ่มเดียวกันนี้ ตั้งแต่ 0 ถึง 9 คน แต่ 0 กับ 9 จะเกิดด้วย

กันไม่ได้

ดังนั้น จำนวนเพื่อนที่เป็นไปได้ คือ 1 ถึง 8 กับ 0 หรือ 9 ตัวใดตัวหนึ่ง (มีทั้งหมด 9 จำนวน) โดยหลักการช่องนกพิราบ นิสิตอย่างน้อย 2 คน มีจำนวนเพื่อนที่อยู่ในกลุ่มนี้เท่ากัน

**ตัวอย่าง** ถ้าจัดให้แขกที่ได้รับเชิญในงานเลี้ยง นั่งโต๊ะเดียว 6 คน จะมี 3 คน ที่ต่างรู้จักซึ่งกันและกัน หรือ มิฉะนั้น มี 3 คนที่ไม่รู้จักกันเลย

สมมติว่า เซตของคนทั้ง 6 คือ {ก,ข,ค,ง,จ,ฉ}

เซตของผู้ร่วมโต๊ะกับ ก คือ {ข,ค,ง,จ,ฉ} ซึ่งเราสามารถสร้างผลแบ่งกั้นเซตดังกล่าวโดยใช้ความสัมพันธ์ “รู้จักกับ ก” จะได้ผลแบ่งกั้นที่มี 2 สับเซตที่ต่างสมาชิกกัน เช่น {{ข,ง,จ},{ค,ฉ}} โดย ข, ง,จ ต่างรู้จักกับ ก แต่ ค และ ฉ ไม่รู้จักกับ ก โดยหลักการช่องนกพิราบ จะมีอย่างน้อย 2 คน อยู่ในสับเซตเดียวกัน และสรุปต่อได้ว่ามีอย่างน้อย 3 คน อยู่ในสับเซตเดียวกัน ดังตัวอย่างข้างบน ข,ง,จ ต่างรู้จักกับ ก ถ้า ข กับ ง รู้จักกันก็เกิดกลุ่ม 3 คนที่ต่างรู้จักกัน แต่ถ้า ข,ง,จ ไม่รู้จักกันเลยก็เกิดกลุ่ม 3 คนที่ต่างเป็นคนแปลกหน้าซึ่งกันและกัน