หน่วยที่ 8 เส้นตรง

สาระการเรียนรู้

1. ระบบพิกัดฉาก
2. ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด
3. จุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด
4. ความชันของเส้นตรง
5. เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก
6. มุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้น
7. สมการของเส้นตรง
8. สมการของเส้นตรงในรูปทั่วไป
9. การเขียนกราฟและหาจุดตัดของเส้นตรง
10. ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง
11. ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับเส้นตรง

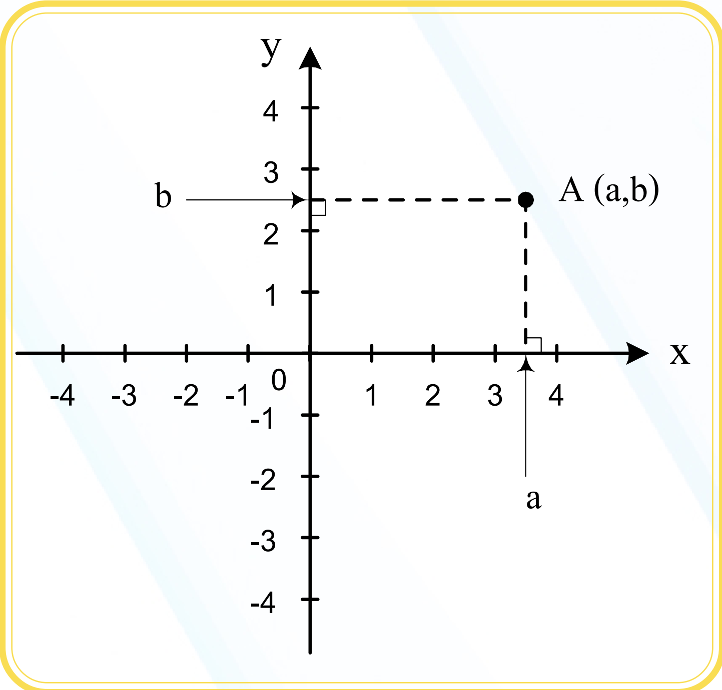
เส้นตรง (Straight Lines)

ระบบพิกัดฉาก

(Rectangular Coordinate System)

เส้นจำนวน 2 เส้นที่ตั้งฉากบนระนาบเดียวกันที่จุด 0 เส้นจำนวน 2 เส้นนั้น เรียกว่า แกนโคออร์ดิเนต เส้นที่อยู่ในแนวนอน เรียกว่า แกน x หรือแกนนอน เส้นที่อยู่ในแนวตั้ง เรียกว่า แกน y หรือแกนตั้ง จุดที่แกน x และแกน y ตัดกันเรียกว่า จุดกำเนิด (Origin Point) เขียนแทนด้วย 0

เขียนในรูปคู่อันดับหรือพิกัด เช่น จุด A มีพิกัดเป็น (a, b) หรือ A(a, b)



ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด

(Distance Between Two Points)

นิยามที่ 1

ถ้า A (x_1, b) และ B (x_2, b) เป็นจุดบนแกน x หรือบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x ระยะทาง (distance) ระหว่างจุด A และ B ซึ่งเขียนแทนด้วย $|AB|$ มีค่าเท่ากับ

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

ถ้า C (a, y_1) และ D (a, y_2) เป็นจุดบนแกน y หรือบนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y ระยะทางระหว่างจุด C และ D ซึ่งเขียนแทนด้วย $|CD|$ จะมีค่าเท่ากับ

$$|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$$

โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง

ข้อสังเกต

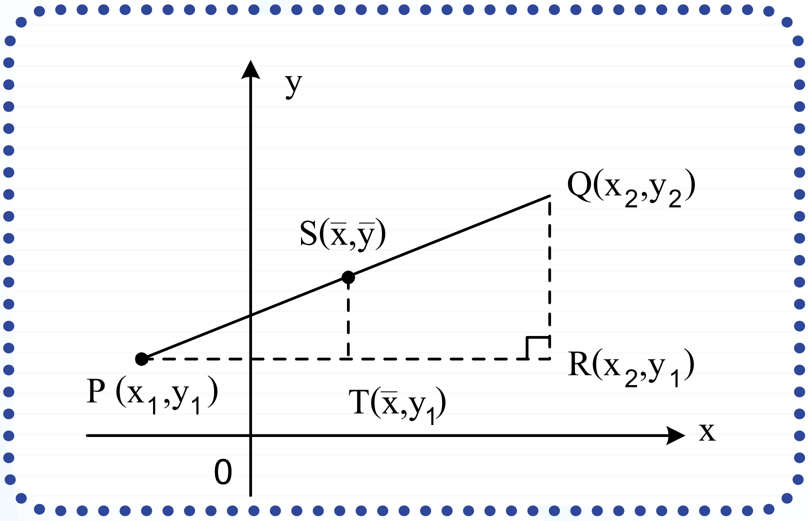
1. ถ้า $b = 0$ จุด 2 จุดนั้นจะอยู่บนแกน x
   และ $b \neq 0$ จุด 2 จุดนั้นจะอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x
2. ถ้า $a = 0$ จุด 2 จุดนั้นจะอยู่บนแกน y
   และ $a \neq 0$ จุด 2 จุดนั้นจะอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y

ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด บนระนาบ

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

จุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

(The Midpoint)



ดังนั้น จุดกึ่งกลางระหว่างจุด $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ คือ จุด s หรือ$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

ความชันของเส้นตรง

(The Slope of Line)

การหาความชันจากมุมเอียง

นิยามที่ 2

มุมเอียง (Inclination) ของเส้นตรง L ในที่นี้ คือ มุม θ หมายถึง มุมที่วัดจากแกน x ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาไปยังเส้นตรง L และจะได้ $0 \le \theta < \pi$

นิยามที่ 3

ความชัน (Slope) ของเส้นตรง L ซึ่งเขียนแทนด้วย m คือ จำนวนที่มีค่าเท่ากับ tan θ เมื่อ θ เป็นมุมเอียง

จะได้ $m = \tan\theta$

การหาความชันจากจุด 2 จุด

ทฤษฎีบทที่ 1

ถ้า $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรง L และ m เป็นความชันของเส้นตรง L

จะได้ $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ลักษณะของเส้นตรงกับค่าของความชัน

ลักษณะของเส้นตรงที่ความสัมพันธ์กับค่าความชัน ซึ่งมี 4 ลักษณะ ดังนี้

1. เส้นตรงที่มีมุมเอียงเป็นมุมแหลม ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) จะมีความชันเป็นบวก

2. เส้นตรงที่มีมุมเอียงเป็นมุมป้าน ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$) จะมีความชันเป็นลบ

3. เส้นตรงที่อยู่ในแนวนอน (ขนานกับแกน x) จะมีความชันเป็นศูนย์

4. เส้นตรงที่อยู่ในแนวตั้ง (ขนานกับแกน y) ความชันจะหาค่าไม่ได้

เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก

(Parallel and Perpendicular Lines)

เส้นขนาน (Parallel Lines)

นิยามที่ 4

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ ถ้า $\theta_1 = \theta_2$ เราจะกล่าวได้ว่า เส้นตรง L_1 ขนานกับ L_2 หรือ $L_1 // L_2$

ทฤษฎีบทที่ 2

ถ้า L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง θ_1 และ θ_2 ตามลำดับและมีความชัน m_1, m_2 ตามลำดับ โดยที่ $\theta_1 \neq 90^\circ$ และ $\theta_2 \neq 90^\circ$

จะได้ (1) ถ้า $m_1 = m_2$ จะได้ L_1 ขนานกับ L_2 หรือ $L_1 // L_2$

(2) ถ้า L_1 ขนานกับ L_2 หรือ $L_1 // L_2$ จะได้ $m_1 = m_2$

นิยามที่ 5

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ และมีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ ถ้า $\theta_1 = \theta_2$ (หรือ $m_1 = m_2$) และ L_1 กับ L_2 มีจุดร่วมกันหนึ่งจุด เราจะกล่าวว่า L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงเดียวกัน

เส้นตั้งฉาก (Perpendicular Lines)

ทฤษฎีบทที่ 3

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ

จะได้ (1) L_1 ตั้งฉากกับ L_2 หรือ $L_1 \perp L_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

(2) $m_1 m_2 = -1$ จะได้ L_1 ตั้งฉากกับ L_2 หรือ $L_1 \perp L_2$

มุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้น

(Angle Between Two Lines)

นิยามที่ 6

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกัน และตัดกันที่จุด P มุมที่จุด P ที่เป็นบวก โดยวัดจาก L_1 ไปยัง L_2 เราเรียกว่า มุมจาก L_1 ไปยัง L_2

ถ้า α เป็นมุมจากเส้นตรง L_1 ไปยัง L_2

จะได้ $$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

ถ้า β เป็นมุมจากเส้นตรง L_2 ไปยัง L_1

จะได้ $$\tan\beta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

สมการของเส้นตรง

(Equation of a Straight Line)

สมการของเส้นตรงที่ขนานกับแกน y

สมการของเส้นตรงที่ขนานกับแกน y คือ

$$x = a \qquad \ldots (1)$$

สมการของเส้นตรงที่ขนานกับแกน x

สมการของเส้นตรงที่ขนานกับแกน x คือ

$$y = b \qquad \ldots (2)$$

สมการแบบจุดและความชัน (The Point-Slope Equation)

ทฤษฎีบทที่ 4

เส้นตรงที่ผ่านจุด $P(x_1, y_1)$ และมีความชันเป็น m จะมีสมการ คือ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

สมการแบบ 2 จุด (The Two-Point Equation)

ทฤษฎีบทที่ 5

เส้นตรงที่ผ่านจุด $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ จะมีสมการ คือ

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

สมการรูปแบบความชัน - จุดตัดแกน y (Y Intercept Equation)

ทฤษฎีบทที่ 6

เส้นตรงที่มีความชัน m และมีส่วนตัดแกน y (y - intercept) เป็น b มีสมการ คือ

$$y = mx + b$$

สมการรูปแบบจุดตัดแกน (The Intercept Equation)

ทฤษฎีบทที่ 7

เส้นตรงที่มีจุดตัดแกน x เป็น a และมีจุดตัดแกน y เป็น b มีสมการ คือ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

สมการของเส้นตรงในรูปทั่วไป

$$Ax + By + C = 0$$

โดยที่ A, B และ C เป็นค่าคงตัว A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

สรุปรูปแบบสมการเส้นตรง

(1.) สมการของเส้นที่ขนานกับแกน y

$$x = a$$

(2.) สมการของเส้นที่ขนานกับแกน x

$$y = b$$

(3.) สมการรูปแบบจุด-ความชัน

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(4.) สมการรูปแบบ 2 จุด

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(5.) สมการรูปแบบจุดตัดแกน y

$$y = mx + b$$

(6.) สมการรูปแบบจุดตัดแกน

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(7.) สมการของเส้นตรงในรูปทั่วไป

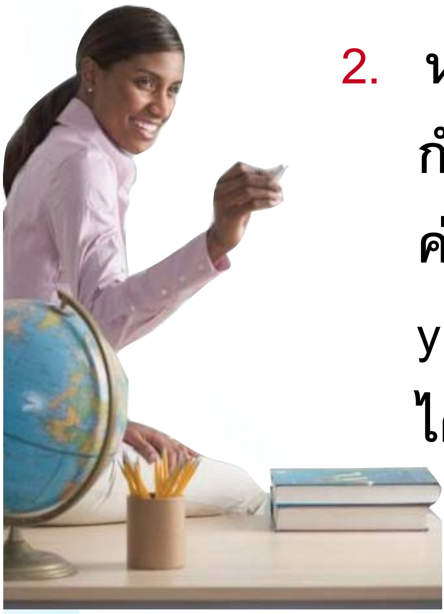
$$Ax + By + C = 0$$

การเขียนกราฟและหาจุดตัดของเส้นตรง

การเขียนกราฟของเส้นตรง

การเขียนกราฟจากสมการเส้นตรงที่นิยมมี 2 วิธี คือ

1. หาคู่ลำดับ (x, y) ที่สอดคล้องกับสมการเส้นตรง โดยการกำหนดค่า x แล้วนำ x ไปแทนในสมการ เพื่อหาค่า y



2. หาจุดตัดบนแกน x และแกน y โดยการกำหนดค่า x = 0 แล้วแทนค่าในสมการหาค่า y ซึ่งจะได้จุดตัดแกน y และกำหนดค่า y = 0 แล้วแทนค่าในสมการหาค่า x ซึ่งจะได้จุดตัดบนแกน x

การหาจุดตัดของเส้นตรง

เส้นตรงที่มีความชันไม่เท่ากัน กราฟจะตัดกันได้เสมอ ซึ่งการหาจุดตัดของกราฟเส้นตรงนั้น อาจหาได้จากการแก้ระบบสมการหรือเขียนกราฟก็ได้

ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

ทฤษฎีบทที่ 8

ถ้า d เป็นระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1)$ กับเส้นตรงที่มีสมการเป็น $Ax + By + C = 0$ จะได้

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับเส้นตรง

ถ้าเส้นตรง $L_1 : Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$ ขนานกับเส้นตรง $L_2 : Ax_2 + By_2 + C_2 = 0$ แล้ว ระยะห่างระหว่าง L_1 และ L_2 คือ

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$