ทวินาม

จงแสดงวิธีทำ

1. จงหาค่าของ

1.1 $3! + 5! = 3(2)(1) + (5)(4)(3)(2)(1) = 6 + 120 = 126$

1.2 $5! - 3! = (5)(4)(3)(2)(1) - (3)(2)(1) = 120 - 6 = 114$

1.3 $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$ เมื่อ $n = 3$ $= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = (n-1)(n-2)$

ถ้า $n = 3$, $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = (n-1)(n-2) = (3-1)(3-2) = 2$

1.4 $\frac{(n-3)!}{(n-1)!}$ เมื่อ $n = 4$ $= \frac{(n-3)!}{(n-1)(n-2)(n-3)!} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$

ถ้า $n = 4$, $\frac{(n-3)!}{(n-1)!} = \frac{1}{(4-1)(4-2)} = \frac{1}{6}$

1.5 $\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{(8)(7)(6)(5!)}{5!\,(3)(2)(1)}$

$= \frac{336}{6} = 56$

1.6 $\binom{8}{5} = \frac{8!}{(8-5)!\,5!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{(8)(7)(6)(5!)}{(3)(2)(1)(5!)}$

$= \frac{336}{6} = 56$

1.7 $\binom{10}{8} = \frac{10!}{(10-8)!\,8!} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{(10)(9)(8!)}{(2)(1)(8!)}$

$= \frac{90}{2} = 45$

1.8 $\binom{10}{2} = \frac{10!}{(10-2)!\,2!} = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{(10)(9)(8!)}{(8!)(2)(1)}$

$= \frac{90}{2} = 45$

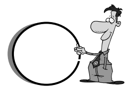
2. จงกระจายทวินามต่อไปนี้ โดยใช้สามเหลี่ยมปาสกาล

2.1 $(X + 3)^6$

วิธีทำ ส.ป.ส. ของ $(a + b)^6$ คือ 1 6 15 20 15 6 1

$\therefore (X + 3)^6 = 1(X^6)(3^0) + 6(X^5)(3^1) + 15(X^4)(3^2) + 20(X^3)(3^3) + 15(X^2)(3^4) + 6(X^1)(3^5) + 1(X^0)(3^6)$

$= X^6 + 18X^5 + 135X^4 + 540X^3 + 1215X^2 + 1458X + 729$

 **2**

2.2 $(\mathbf{X} + 4)^6$

วิธีทำ ส.ป.ส. ของ $(a + b)^6$ คือ 1 6 15 20 15 6 1

$\therefore \ (X + 4)^6 = 1(X^6)(4^0) + 6(X^5)(4^1) + 15(X^4)(4^2) + 20(X^3)(4^3) + 15(X^2)(4^4) + 6(X^1)(4^5) + 1(X^0)(4^6)$

$= X^6 + 24X^5 + 240X^4 + 1280X^3 + 3840X^2 + 6144X + 4096$

2.3 $(\mathbf{X} - 2)^5$

วิธีทำ ส.ป.ส. ของ $(a + b)^5$ คือ 1 5 10 10 5 1

$\therefore \ (X - 2)^5 = 1(X^5)(-2)^0 + 5(X^4)(-2)^1 + 10(X^3)(-2)^2 + 10(X^2)(-2)^3 + 5(X^1)(-2)^4 + 1(X^0)(-2)^5$

$= X^5 - 10X^4 + 40X^3 - 80X^2 + 80X - 32$

2.4 $(\mathbf{X} - 3)^5$

วิธีทำ ส.ป.ส. ของ $(a + b)^5$ คือ 1 5 10 10 5 1

$\therefore \ (X - 3)^5 = 1(X^5)(-3)^0 + 5(X^4)(-3)^1 + 10(X^3)(-3)^2 + 10(X^2)(-3)^3 + 5(X^1)(-3)^4 + 1(X^0)(-3)^5$

$= X^5 - 15X^4 + 90X^3 - 270X^2 + 405X - 243$

2.5 $(2\mathbf{X} + 3\mathbf{y})^4$

วิธีทำ ส.ป.ส. ของ $(a + b)^4$ คือ 1 4 6 4 1

$\therefore \ (2X + 3y)^4 = 1(2X)^4(3y)^0 + 4(2X)^3(3y)^1 + 6(2X)^2(3y)^2 + 4(2X)^1(3y)^3 + 1(2X)^0(3y)^4$

$= 16X^4 + 96X^3y + 216X^2y^2 + 216Xy^3 + 81y^4$

2.6 $(3\mathbf{X} + 2\mathbf{y})^4$

วิธีทำ ส.ป.ส. ของ $(a + b)^4$ คือ 1 4 6 4 1

$\therefore \ (3X + 2y)^4 = 1(3X)^4(2y)^0 + 4(3X)^3(2y)^1 + 6(3X)^2(2y)^2 + 4(3X)^1(2y)^3 + 1(3X)^0(2y)^4$

$= 81X^4 + 216X^3y + 216X^2y^2 + 96Xy^3 + 16y^4$

2.7 $(1 - 2\mathbf{X})^8$

วิธีทำ ส.ป.ส. ของ $(a + b)^8$ คือ 1 8 28 56 70 56 28 8 1

$\therefore \ (1 - 2X)^8 = 1(1^8)(-2X)^0 + 8(1^7)(-2X)^1 + 28(1^6)(-2X)^2 + 56(1^5)(-2X)^3 + 70(1^4)(-2X)^4$

$+ 56(1^3)(-2X)^5 + 28(1^2)(-2X)^6 + 8(1^1)(-2X)^7 + 1(1^0)(-2X)^8$

$= 1 - 16X + 112X^2 - 448X^3 + 1120X^4 - 1792X^5 + 1792X^6 - 1024X^7 + 256X^8$

2.8 $(1 - 3\mathbf{X})^8$

วิธีทำ ส.ป.ส. ของ $(a + b)^8$ คือ 1 8 28 56 70 56 28 8 1

$\therefore \ (1 - 3X)^8 = 1(1^8)(-3X)^0 + 8(1^7)(-3X)^1 + 28(1^6)(-3X)^2 + 56(1^5)(-3X)^3 + 70(1^4)(-3X)^4$

$+ 56(1^3)(-3X)^5 + 28(1^2)(-3X)^6 + 8(1^1)(-3X)^7 + 1(1^0)(-3X)^8$

$= 1-24X + 252X^2 - 1512X^3 + 5670X^4 - 13608X^5 + 20412X^6 - 17496X^7 + 6561X^8$

3. จงกระจาย $(2\mathbf{X} + \mathbf{y}^2)^5$ โดยใช้สามเหลี่ยมของปาสกาล

วิธีทำ ส.ป.ส. ของ $(a + b)^5$ คือ 1 5 10 10 5 1

$\therefore \ (2X + y^2)^5 = 1(2X)^5(y^2)^0 + 5(2X)^4(y^2)^1 + 10(2X)^3(y^2)^2 + 10(2X)^2(y^2)^3 + 5(2X)(y^2)^4 + 1(2X)^0(y^2)^5$

$= 32X^5+80X^4y^2+80X^3y^4+40X^2y^6+10Xy^8+y^{10}$

4. จงกระจาย $(X^2 + y^3)^6$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

วิธีทำ $(X^2+y^3)^6 = \binom{6}{0}(X^2)^6(y^3)^0 + \binom{6}{1}(X^2)^5(y^3)^1 + \binom{6}{2}(X^2)^4(y^3)^2 + \binom{6}{3}(X^2)^3(y^3)^3$

$+ \binom{6}{4}(X^2)^2(y^3)^4 + \binom{6}{5}(X^2)(y^3)^5 + (\binom{6}{6}(X^2)^0(y^3)^6$

$\binom{6}{0} = 1$, $\binom{6}{1} = 6$, $\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$

$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$, $\binom{6}{4} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$

$\binom{6}{5} = 6$, $\binom{6}{6} = 1$

$\therefore\ (X^2 + y^3)^6 = (1)(X^{12}) + (6)(X^{10})(y^3) + (15)(X^8)(y^6) + 20(X^6)(y^9)$

$+ (15)(X^4)(y^{12}) + (6)(X^2)(y^{15}) + (1)(y^{18})$

$= X^{12} + 6X^{10}y^3 + 15X^8y^6 + 20X^6y^9 + 15X^4y^{12} + 6X^2y^{15} + y^{18}$

5. จงกระจายบททวินามต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

5.1 $(X - 2)^5$

วิธีทำ $(X - 2)^5 = \binom{5}{0}(X^5)(-2)^0 + \binom{5}{1}(X^4)(-2) + \binom{5}{2}(X^3)(-2)^2 + \binom{5}{3}(X^2)(-2)^3 + \binom{5}{4}(X)(-2)^4$

$+ (\binom{5}{5}(X^0)(-2)^5$

$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$, $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$, $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$

$\therefore\ (X - 2)^5 = X^5 - 10X^4 + 40X^3 - 80X^2 + 80X - 32$

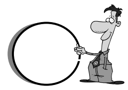
5.2 $(X - 3)^5$

วิธีทำ $(X - 3)^5 = \binom{5}{0}(X^5)(-3)^0 + \binom{5}{1}(X^4)(-3) + \binom{5}{2}(X^3)(-3)^2 + \binom{5}{3}(X^2)(-3)^3$

$+ \binom{5}{4}(X)(-3)^4 + (\binom{5}{5}(X^0)(-3)^5$

$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$, $\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$, $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$

$\therefore\ (X - 3)^5 = X^5 - 15X^4 + 90X^3 - 270X^2 + 405X - 243$



5.3 $(2x + y)^4$

วิธีทำ $(2x+y)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4(y^0) + \binom{4}{1}(2x)^3(y^1) + \binom{4}{2}(2x)^2(y^2) + \binom{4}{3}(2x)(y^3) + \binom{4}{4}(2x)^0(y^4)$

$\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1 \;,\; \binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4 \;,\; \binom{4}{2} = 6$

$\therefore\ (2x+y)^4 = 16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$

5.4 $(x + 2y)^4$

วิธีทำ $(x+2y)^4 = \binom{4}{0}(x)^4(2y)^0 + \binom{4}{1}(x)^3(2y)^1 + \binom{4}{2}(x)^2(2y)^2 + \binom{4}{3}(x)(2y)^3 + \binom{4}{4}(x)^0(2y)^4$

$\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1 \;,\; \binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4 \;,\; \binom{4}{2} = 6$

$\therefore\ (x+2y)^4 = x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$

5.5 $(\frac{x}{2} + 2)^6$

วิธีทำ $(\frac{x}{2}+2)^6 = \binom{6}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^6(2^0) + \binom{6}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^5(2^1) + \binom{6}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^4(2^2) + \binom{6}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3(2^3)$

$+ \binom{6}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^2(2^4) + \binom{6}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^1(2^5) + \binom{6}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^0(2^6)$

$\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1 \;,\; \binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6$

$\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15 \;,\; \binom{6}{3} = 20$

$\therefore\ (\frac{x}{2}+2)^6 = \frac{x^6}{64} + \frac{3x^5}{8} + \frac{15x^4}{4} + 20x^3 + 60x^2 + 96x + 64$

5.6 $(3 - \frac{x}{2})^6$

วิธีทำ $(3-\frac{x}{2})^6 = \binom{6}{0}(3^6)\left(-\frac{x}{2}\right)^0 + \binom{6}{1}(3^5)\left(-\frac{x}{2}\right)^1 + \binom{6}{2}(3^4)\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{6}{3}(3^3)\left(-\frac{x}{2}\right)^3$

$+ \binom{6}{4}(3^2)\left(-\frac{x}{2}\right)^4 + \binom{6}{5}(3^1)\left(-\frac{x}{2}\right)^5 + \binom{6}{6}(3^0)\left(-\frac{x}{2}\right)^6$

$\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1 \;,\; \binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6$

$\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15 \;,\; \binom{6}{3} = 20$

$\therefore\ (3-\frac{x}{2})^6 \quad = \quad 729 - 729x + \frac{1215x^2}{4} - \frac{135x^3}{2} + \frac{135x^4}{16} - \frac{9x^5}{16} + \frac{x^6}{64}$

5.7 จงหาพจน์ที่ 5 ของ $(x - 2y^3)^{10}$

วิธีทำ พจน์ที่ $r + 1 \quad = \quad \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

พจน์ที่ $5 = 4 + 1 \quad = \quad \binom{10}{4}(x)^{10-4}(-2y^3)^4$

$= \quad \frac{10!}{4!(10-4)!}(x^6)(16y^{12})$

$= \quad 210x^6(16y^{12})$

$= \quad 3360x^6y^{12}$

5.8 จงหาพจน์ที่ 6 ของ $(x - 3y^2)^{10}$

วิธีทำ พจน์ที่ $r + 1 \quad = \quad \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

พจน์ที่ $6 = 5 + 1 \quad = \quad \binom{10}{5}(x)^{10-5}(-3y^2)^5$

$= \quad \frac{10!}{5!(10-5)!}(x^5)(-243y^{10})$

$= \quad 252x^5(-243y^{10})$

$= \quad -61236x^5y^{10}$

6. จงหาค่าต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม และให้ตอบทศนิยมไม่เกิน 4 ตำแหน่ง

6.1 $(4.01)^4$

วิธีทำ $(4.01)^4 \quad = \quad (4 + 0.01)^4$

$= \quad \binom{4}{0}(4^4)(0.01)^0 + \binom{4}{1}(4^3)(0.01)^1 + \binom{4}{2}(4^2)(0.01)^2 + \binom{4}{3}(4^1)(0.01)^3$

$+ \binom{4}{4}(4^0)(0.01)^4$

$\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1\ ,\ \binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4\ ,\ \binom{4}{2} = 6$

$\therefore\ (4.01)^4 \quad = \quad 256 + 2.56 + 0.0096 + 0.000016 + 0.00000001$

$= \quad 258.5696$

6.2 $(9.99)^6$

วิธีทำ $(9.99)^6 \quad = \quad (10-0.01)^6 \quad = \quad (10+(-0.01))^6$

$= \quad \binom{6}{0}(10^6)(-0.01)^0 + \binom{6}{1}(10^5)(-0.01)^1 + \binom{6}{2}(10^4)(-0.01)^2 + \binom{6}{3}(10^3)(-0.01)^3$

$$+\binom{6}{4}(10^2)(-0.01)^4+\binom{6}{5}(10)(-0.01)^5+\binom{6}{6}(10^0)(-0.01)^6$$

$$\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1 \quad , \quad \binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6$$

$$\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15 \quad , \quad \binom{6}{3} = 20$$

$$\therefore \; (9.99)^6 = 1000000 - 6(100000)(0.01) + 15(10000)(0.0001)$$

$$- 20(1000)(0.000001) + 15(100)(0.00000001)$$

$$- 6(10)(0.0000000001) + (0.000000000001)$$

$$= 994014.98$$

6.3 $(2.04)^5$

วิธีทำ $(2.04)^5 = (2 + 0.04)^5$

$$= \binom{5}{0}(2)^5(0.04)^0+\binom{5}{1}(2)^4(0.04)^1+\binom{5}{2}(2)^3(0.04)^2$$

$$+\binom{5}{3}(2)^2(0.04)^3+\binom{5}{4}(2)^1(0.04)^4+\binom{5}{5}(2)^0(0.04)^5$$

$$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1 \; , \; \binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5 \; , \; \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$$

$$\therefore \; (2.04)^5 = 32 + 3.2 + 0.128 + 0.00256 + 0.0000256 + 0.000000102$$

$$= 35.3306$$

6.4 $(2.05)^7$

วิธีทำ $(2.05)^7 = (2 + 0.05)^7$

$$= \binom{7}{0}(2)^7(0.05)^0+\binom{7}{1}(2)^6(0.05)^1+\binom{7}{2}(2)^5(0.05)^2+\binom{7}{3}(2)^4(0.05)^3$$

$$+\binom{7}{4}(2)^3(0.05)^4+\binom{7}{5}(2)^2(0.05)^5+\binom{7}{6}(2)^1(0.05)^6+\binom{7}{7}(2)^0(0.05)^7$$

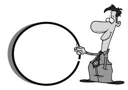
$$\binom{7}{0} = \binom{7}{7} = 1 \; , \; \binom{7}{1} = \binom{7}{6} = 7 \; , \; \binom{7}{2} = \binom{7}{5} = 21$$

$$\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35$$

$$\therefore \; (2.05)^7 = 128 + 22.4 + 1.68 + 0.07 + 0.001736 + 0.0000252$$

$$+ 0.000000219 + 0.00000000078$$

$$= 152.1518$$



7

เมทริกซ์

จงแสดงวิธีทำ

1. กำหนดให้

1.1 จงบอกขนาดของเมทริกซ์

วิธีทำ 1.1 A มีขนาด 3×3 , B มีขนาด 3×2 , C มีขนาด 2×3

D มีขนาด 2×2 , E มีขนาด 3×1 , F มีขนาด 4×4

G มีขนาด 1X3

1.2 เมทริกซ์ใดเป็นเมทริกซ์จัตุรัส A, F

1.3 เมทริกซ์ใดเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน D, F

1.4 เมทริกซ์ใดเป็นเมทริกซ์แถว G

1.5 จากเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จงหาสมาชิก $\mathbf{a}_{11}$ $\mathbf{a}_{23}$ และ $\mathbf{a}_{32}$ 0, 7, 1

1.6 จากเมทริกซ์ $\mathbf{F}$ จงหาสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก 1, 2, 3, -1

2. จากสมการเมทริกซ์ต่อไปนี้ จงหาค่าตัวแปร

2.1 $\begin{bmatrix} 2x & y \\ z & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ y+3 & w \end{bmatrix}$

วิธีทำ $2x = 6$, $x = 3$

$y = -2$

$z = y + 3$, $z = -2 + 3$, $z = 1$

$w = 3$

2.2 $3\begin{bmatrix} 2x+y \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ x+y \end{bmatrix}$

วิธีทำ $3(2x + y) = 12$

$6x + 3y = 12$ …(1)

$x + y = 1$ …(2)

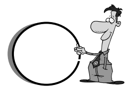
$(2) \times 6$, $6x + 6y = 6$ …(3)

$(3) - (1)$, $3y = -6$, $y = -2$

แทน $y = -2$ ใน (2) $x = 3$

$\therefore$ $x = 3$, $y = -2$

3. กำหนดให้



8

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1 จงหา $\mathbf{A+B-C}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} A+B-C &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+1-(-2) & 1+0-1 & 2+2-0 \\ -1-1-1 & 0+3-3 & 3+1-4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.2 จงแสดงว่า $\mathbf{A+B=B+A}$

วิธีทำ

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B+A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A+B = B+A$$

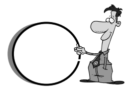
3.3 จงแสดงว่า $\mathbf{A+(B+C)=(A+B)+C}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \mathbf{A}+(B+C) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A+B)+C &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore A+(B+C) = (A+B)+C$$



3.4 จงแสดงว่า $\mathbf{A} + \underline{\mathbf{0}} = \mathbf{A}$

วิธีทำ $A + \underline{0} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A$

$\therefore A + \underline{0} = A$

จากข้อ 4-7 จงหา $\mathbf{AB}$ และ $\mathbf{BA}$

4. $\mathbf{A} = [-1 \quad 2 \quad 3]$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $AB = [-1 \quad 2 \quad 3] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [-3+2+12] = [11]$

$BA = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} [-1 \quad 2 \quad 3] = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+4 & 0-12 \\ -5+3 & 0-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -12 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+0 & 20+0 \\ 2+3 & 4-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $AB = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -2+0+2 & -4+0+5 & -8+0+3 \\ 3+15+4 & 6+0+10 & 12+5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 22 & 16 & 23 \end{bmatrix}$

BA = หาผลคูณไม่ได้ เพราะจำนวนหลักของตัวตั้งไม่เท่ากับจำนวนแถวของตัวคูณ

7. กำหนด $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 3+10+32 & 18+25+56 & 27-20+8 \\ 4+2+16 & 24+5+28 & 36-4+4 \\ -1+4-4 & -6+10-7 & -9-8-1 \\ 2+14+0 & 12+35+0 & 18-28+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 45 & 99 & 15 \\ 22 & 57 & 36 \\ -1 & -3 & -18 \\ 16 & 47 & -10 \end{bmatrix}$$

BA หาผลคูณไม่ได้ เนื่องจากจำนวนหลักของตัวตั้งไม่เท่ากับจำนวนแถวของตัวคูณ

8. กำหนดให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8.1 จงหา $\mathbf{A}^2$

วิธีทำ $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1-6 & -3-15 \\ 2+10 & -6+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -18 \\ 12 & 19 \end{bmatrix}$$

8.2 จงแสดงว่า $\mathbf{A(BC) = (AB)C}$

วิธีทำ $A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -8 & -17 \\ 8 & 17 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A(BC) = (AB)C$

8.3 จงหา DC

วิธีทำ $DC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

8.4 จงแสดงให้เห็นจริงว่า $(AB)^T$ กับ B^TA^T เท่ากันหรือไม่ เพราะอะไร

วิธีทำ $AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & -17 \\ 8 & 17 & 21 \end{bmatrix}$

$(AB)^T = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -8 & 17 \\ -17 & 21 \end{bmatrix}$

$B^TA^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -8 & 17 \\ -17 & 21 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad (AB)^T = B^TA^T$ เพราะ เป็นไปตามสมบัติของเมทริกซ์

9. จงบอกเงื่อนไข ที่ทำให้ $(AB)^2 = A^2B^2$

วิธีทำ เงื่อนไขที่ทำให้ $(AB)^2 = A^2B^2$

1. A และ B ต้องมีมิติเท่ากัน
2. A และ B ต้องเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์เมทริกซ์หนึ่งหรือเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ทั้ง 2 เมทริกซ์

10. จงหาเมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$$

วิธีทำ ให้ $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

จะได้ $AB = BA = I$

$\therefore \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2a+4c & 2b+4d \\ -5a+9c & -5b+9d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad 2a + 4c = 1 \qquad \ldots(1)$

$-5a + 9c = 0$ …(2)

$2b + 4d = 0$ …(3)

$-5b + 9d = 1$ …(4)

(1) × 5 , $10a + 20c = 5$ …(5)

(2) × 2 , $-10a + 18c = 0$ …(6)

(5) + (6) , $38c = 5$, $c = \frac{5}{38}$

แทน $c = \frac{5}{38}$ ใน (1) ได้ $2a + 4\left(\frac{5}{38}\right) = 1$, $a = \frac{9}{38}$

(3) × 5 , $10b + 20d = 0$ …(7)

(4) × 2 , $-10b + 18d = 2$ …(8)

(7) + (8) , $38d = 2$, $d = \frac{1}{19}$

แทน $d = \frac{1}{19}$ ใน (3) ได้ $2b+4\left(\frac{1}{19}\right) = 0$, $b = -\frac{2}{19}$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{38} & -\frac{2}{19} \\ \frac{5}{38} & \frac{1}{19} \end{bmatrix}$$

ดีเทอร์มิแนนต์

จงแสดงวิธีทำ

1. จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1.1 **[15]** = 15

1.2 **[-3]** = -3

1.3 $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ = -5-8 = -13

1.4 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ = 2+12 = 14

1.5 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ = -2 + 0 - 16 – 2 - 4-0 = -24

1.6 $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = 8 + 0 + 3 - 0 - 1 - 8 = 2$

2. จงหาค่าต่อไปนี้

2.1 $\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}$

วิธีทำ $\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{6+20}{13-0} = \dfrac{26}{13} = 2$

2.2 $\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}$

วิธีทำ $\dfrac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|} = \dfrac{6+0+4-0-9-0}{0+0+12-0+1-0} = \dfrac{1}{13}$

3. จงหาค่า a และ b

3.1 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & a \end{vmatrix}$ **= -10**

วิธีทำ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & a \end{vmatrix} = -10$, $2a - 12 = -10$, $a = 1$

3.2 วิธีทำ $\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & b & 5 & 3 \end{array}\right| = 0$

$\therefore \quad 0 + 20 + 24 - 0 - 24 - 4b = 0$

$20 = 4b$, $b = 5$

4. กำหนด $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

จงหา $\mathbf{M_{11}}, \mathbf{M_{23}}, \mathbf{C_{22}}$, **และ** $\mathbf{C_{32}}$

วิธีทำ $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 10 = -1$

วิธีทำ $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 0 = 10$

วิธีทำ $C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (1)(6 + 1) = 7$

วิธีทำ $C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(4 + 4) = -8$

5. กำหนด $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

จงหา $\mathbf{det.A}$ **โดยวิธีการกระจายโคแฟกเตอร์**

วิธีทำ กระจายตามแถวที่ 2, $\det A = a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23}$

$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(20 + 2) = -22$

$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(2 - 12) = 10$

$\det A = (-1)(-22) + 0 + (2)(10) = 42$

6. จงใช้สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ อธิบายว่าสมการเป็นจริงอย่างไร

6.1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$

วิธีทำ สมการเป็นจริงตามสมบัติ ข้อ 1

6.2 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

วิธีทำ สมการเป็นจริงตามสมบัติ ข้อ 3

6.3 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

วิธีทำ สมการเป็นจริงตามสมบัติ ข้อ 4

7. กำหนด $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **จงหาค่า $\det.\mathbf{A}$**

เลือกกระจายตามแถวที่ 3

วิธีทำ $\therefore \quad \det A = a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33} + a_{34}c_{34}$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(0\text{-}4 + 0 - 0 + 1 + 4) = -1$$

$$c_{34} = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-3 + 0 - 4 + 12 - 0 + 2) = -7$$

$$\therefore \quad |\mathbf{A}| = 0 + 2(-1) + 0 + 2(-7) = -16$$

8. จงหา $\det.\mathbf{A}$ จาก

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ กระจายตามแถวที่ 2 , $\det A = a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23} + a_{24}c_{24}$

$= a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{24}c_{24}$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 4 \end{matrix} = (-1)(60 + 0 + 32 - 0 + 16 + 72) = -180$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{matrix} = (1)(30 + 18 - 8 - 3\ 0 + 8 - 18) = 0$$

$$c_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{matrix} = (1)(16 + 30 + 0 + 36 - 0 + 8) = 90$$

$$\det A = 2(-180) + 1(0) + 4(90) = 0$$

9. จงหา det.B จาก

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ กระจายตามแถวที่ 3 , $\det B = a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33} + a_{34}c_{34} + a_{35}c_{35}$

$= a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33} + a_{34}c_{34}$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$, กระจายตามหลักที่ 2 จะได้

$$= (-1)(a_{22}c_{22} + a_{42}c_{42})$$

$$= (-1)\left[2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}\right]$$

$$= (-1)[(2)(2 + 6 + 6 - 3 - 6 - 4) + 3(0 + 4 + 3 - 0 - 2 - 6)]$$

$$= (-1)[(2)(1) + (3)(-1)] = (-1)(-1) = 1$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$, กระจายตามแถวที่ 2 จะได้

$$= (1)(a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{24}c_{24})$$

$$= a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{24}c_{24}$$

$$= (1)\left[(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right] + (-1)\left[(1)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right] + (1)\left[(1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= (1)[(-1)(0)] + (-1)[(1)(1)] + (1)[(1)(-1)]$$

$$= 0 - 1 - 1 = -2$$

$$c_{34} = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$, กระจายตามแถวที่ 1 จะได้

$$= (-1)(a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{14}c_{14})$$

$$= (-1)\left[2\left((1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}\right) + (1)\left((-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\right) + (3)\left((-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right)\right]$$

$= (-1)[(2)(23) + 1 + (-3)(8)]$

$= (-1)(23) \qquad = -23$

$\therefore \det B = (1)(1) + (1)(-2) + (1)(-23) = -24$

10. จงแสดงให้เห็นว่า

$$\begin{vmatrix} \mathbf{b^2+ac} & \mathbf{bc} & \mathbf{c^2} \\ \mathbf{ab} & \mathbf{2ac} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{a^2} & \mathbf{ab} & \mathbf{b^2+ac} \end{vmatrix} = 4\,\mathbf{a^2b^2c^2}$$

วิธีทำ

$$\begin{vmatrix} b^2+ac & bc & c^2 \\ ab & 2ac & bc \\ a^2 & ab & b^2+ac \end{vmatrix}\begin{matrix} b^2+ac & bc \\ ab & 2ac \\ a^2 & ab \end{matrix}$$

$= (b^2+ac)(2ac)(b^2+ac) + (bc)(bc)(a^2) + (c^2)(ab)(ab) - (a^2)(2ac)(c^2)$
$\quad - (ab)(bc)(b^2+ac) - (b^2+ac)(ab)(bc)$

$= 2ab^4c + 4a^2b^2c^2 + 2a^3c^3 + a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 - 2a^3c^3 - (ab^4c + a^2b^2c^2) - (ab^4c + a^2b^2c^2)$

$= 4a^2b^2c^2$

การแก้สมการเชิงเส้น

จงแสดงวิธีทำ

จากข้อ 1-4 จงหา $\mathbf{adj\,(A)}$

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$

วิธีทำ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

$C_{11} = 5$, $C_{12} = 4$, $C_{21} = 1$, $C_{22} = 1$

$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$C_{14} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{34} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{41} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{43} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & -6 & -4 \\ 4 & 6 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{bmatrix}$

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{12} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -12$$

$$C_{14} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -12$$

$$C_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 12$$

$$C_{34} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{41} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{43} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & -12 & -6 & 6 \\ -12 & 6 & 12 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

จากข้อ 5-9 จงหา A^{-1}

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$c_{11} = 4$, $c_{12} = -2$, $c_{21} = 1$, $c_{22} = 3$

$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\det.A = 12+2 = 14$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{-2}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ \frac{-1}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$$

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det.A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -21$$

$c_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$, $c_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 6) = 5$

$c_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $c_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-3 - 2) = 5$

$c_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $c_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 9) = -13$

$c_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$, $c_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$c_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -6 \\ 5 & -1 & -3 \\ 2 & -13 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{21} & \frac{-5}{21} & \frac{6}{21} \\ \frac{-5}{21} & \frac{1}{21} & \frac{3}{21} \\ \frac{-2}{21} & \frac{13}{21} & \frac{-3}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{21} & \frac{-5}{21} & \frac{2}{7} \\ \frac{-5}{21} & \frac{1}{21} & \frac{1}{7} \\ \frac{-2}{21} & \frac{13}{21} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix}$$

7. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det.A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} R_3 + R_1$$

$$= (-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{14} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{34} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{41} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{42} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{43} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{44} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -6 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$$\det.A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{34} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{41} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{42} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{43} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$c_{44} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-5}{3} & 1 & \frac{-4}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det.A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ -2 & 4 & -8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ -2 & 4 & -8 & 16 \end{vmatrix} R_1 + R_2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 12 \\ -2 & 4 & -8 & 12 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 12 \\ -2 & -8 & 12 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 24 \end{vmatrix}$$

$$= -48\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -48(8-2) = -288$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 16 \\ -2 & 4 & -8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 16 \\ 4 & -8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 16 \\ 0 & -16 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 16\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 16(16\text{-}4) = 192$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 16 \\ 1 & -2 & -8 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 16 \\ -2 & -8 & 16 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 32 \end{vmatrix}$$

$$= -32\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -32(8\text{-}2) = -192$$

$$C_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 16 \\ -2 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 16 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = -4(16\text{-}4) = -48$$

$$C_{15} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 8\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8(8\text{-}2) = 48$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ -2 & 4 & -8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 8 & 16 \\ 4 & -8 & 16 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 8 & 16 \\ 0 & -16 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -16\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = -16(16 - 4) = -192$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 16 \\ 1 & -2 & -8 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & 16 \\ -2 & -8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 32 \end{vmatrix}$$

$$= 32\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 32(-8 + 2) = -192$$

$$C_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 16 \\ -2 & 4 & 16 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 16 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 4(16 - 4) = 48$$

$$C_{25} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \\ -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -8\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -8(-8 + 2) = 48$$

$$C_{31} = 0$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 2(16 - 4) = 24$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -8 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -8 & 16 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -8 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = 2(8 - 2) = 12$$

$$C_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = -2(16 - 4) = -24$$

$$C_{35} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = -2(8 - 2) = -12$$

$$C_{41} = 0$$

$$C_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 16 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = -2(16 - 4) = -24$$

$$C_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -2(-8 + 2) = 12$$

$$C_{44} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 16 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 16 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 2(16 - 4) = 24$$

$$C_{45} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2(-8 + 2) = -12$$

$$C_{51} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ -2 & 4 & -8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ -2 & 4 & -8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 8 & 0 & 32 \end{vmatrix}$$

$$= 8\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 16 \end{vmatrix} + 32\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 8\left(2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}\right) + 32\left(-2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 96 - 384 \quad = \quad -288$$

$$C_{52} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & -8 & 16 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & -8 & 16 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{53} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 16 \\ 1 & -2 & -8 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 16 \\ 0 & -4 & -16 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 16 \\ 0 & -4 & -16 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 16 \\ 0 & -4 & -16 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & -4 & -16 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 12\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 16 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = 12(32 - 2) = 360$$

$$C_{54} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{55} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 16\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} -4\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 16(-8 + 2) -4(-8 + 2)$$

$$= -96 + 24 \quad = \quad -72$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -288 \\ 192 & -192 & 24 & -24 & 0 \\ -192 & -192 & 12 & 12 & 360 \\ -48 & 48 & -24 & 24 & 0 \\ 48 & 48 & -12 & -12 & -72 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{12} & \frac{1}{12} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{24} & \frac{-1}{24} & \frac{-5}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{12} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

จากข้อ 10-11 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ

10. $X_1 + X_2 + X_3 = 0$

$X_1 + 2X_2 - 3X_3 = 1$

$-2X_1 + X_2 + 2X_3 = 0$

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\det.A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 12 = 16$

$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$

$C_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 6) = 4$

$C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5$

$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1$

$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$

$C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 2) = -3$

$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$

$$c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3-1) = 4$$

$$c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-5}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{16} & \frac{-3}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{7}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{-5}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{16} & \frac{-3}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{16} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{16} \end{bmatrix}$$

$x_1 = \frac{-1}{16}$, $x_2 = \frac{1}{4}$ และ $x_3 = \frac{-3}{16}$

11. $\mathbf{4X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 = 4}$

$\mathbf{X_1 - X_2 + X_3 + 3X_4 = 0}$

$\mathbf{-X_1 + 2X_2 + 3X_3 - 4X_4 = 0}$

$\mathbf{2X_1 + 3X_2 - X_3 - X_4 = 2}$

วิธีทำ
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det.A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & -4 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 5 & 10 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -32$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -36$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 31$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 23$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 52$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -51$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{24} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -43$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 20$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -19$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{34} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 11$$

$$C_{41} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 40$$

$$c_{42} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -46$$

$$c_{43} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 4$$

$$c_{44} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -30$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -36 & 52 & 20 & 40 \\ 31 & -51 & -19 & -46 \\ -2 & -6 & -6 & 4 \\ 23 & -43 & 11 & -30 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{36}{32} & \frac{-52}{32} & \frac{-20}{32} & \frac{-40}{32} \\ \frac{-31}{32} & \frac{51}{32} & \frac{19}{32} & \frac{46}{32} \\ \frac{2}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{-4}{32} \\ \frac{-23}{32} & \frac{43}{32} & \frac{-11}{32} & \frac{30}{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{36}{32} & \frac{-52}{32} & \frac{-20}{32} & \frac{-40}{32} \\ \frac{-31}{32} & \frac{51}{32} & \frac{19}{32} & \frac{46}{32} \\ \frac{2}{32} & \frac{6}{32} & \frac{6}{32} & \frac{-4}{32} \\ \frac{-23}{32} & \frac{43}{32} & \frac{-11}{32} & \frac{30}{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{36}{8} - \frac{40}{16} \\ \frac{-31}{8} + \frac{46}{16} \\ \frac{2}{8} - \frac{4}{16} \\ \frac{-23}{8} + \frac{30}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{8} \\ \frac{-8}{8} \\ 0 \\ \frac{-8}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ และ $x_4 = -1$

จากข้อ 12-13 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้กฎของคราเมอร์

12. $2X_1 - X_2 - X_3 = 1$

$X_1 + 3X_2 + X_3 = 0$

$-X_1 + X_2 + 2X_3 = 4$

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\det.A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 1 - 1 - 3 - 2 + 2 = 9$$

$$\det.A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 0 + 12 - 1 - 0 = 13$$

$$\det.A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 1 - 4 - 0 - 8 - 2 = -15$$

$$\det.A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 0 + 1 + 3 - 0 + 4 = 32$$

$$X_1 = \frac{\det.A_1}{\det.A} = \frac{13}{9}$$

$$X_2 = \frac{\det.A_2}{\det.A} = \frac{-15}{9} = \frac{-5}{3}$$

$$X_3 = \frac{\det.A_3}{\det.A} = \frac{32}{9} = \frac{32}{9}$$

$\therefore$ $X_1 = \frac{13}{9}$, $X_2 = \frac{-5}{3}$ และ $X_3 = \frac{32}{9}$

13. $2X_1 + 3X_2 + 2X_3 - 3X_4 = 1$

$X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0$

$3X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4 = 1$

$X_1 + 2X_2 + 2X_3 - 2X_4 = 0$

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\det.A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underleftarrow{2R_2 + R_4}$$

$$= (-3)\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3)(-1) = 3$$

$$\det.A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xleftarrow{2R_2 + R_4} = 0$$

$$\det.A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(0) + (-1)(-3) = 3$$

$$\det.A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-3)+(1)(0) = -3$$

$$\det.A_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(3) + (-1)(-3) = 0$$

$$X_1 = \frac{\det.A_1}{\det.A} = \frac{0}{3} = 0$$

$$X_2 = \frac{\det.A_2}{\det.A} = \frac{3}{3} = 1$$

$$X_3 = \frac{\det.A_3}{\det.A} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$X_4 = \frac{\det.A_4}{\det.A} = \frac{0}{3} = 0$$

$\therefore$ $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = -1$ และ $X_4 = 0$

เส้นตรง

จงแสดงวิธีทำ

จากข้อ 1-4 จงหาระยะระหว่างจุด A และ B

1. A(-3, 2) ; B(5, 8)

A(-3, 2) ; B(5, 8) : $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$= \sqrt{(5+3)^2+(8-2)^2}$

$= \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$

2. A(-2, 3) ; B(-3, 3)

A(-2, 3) ; B(-3, 3) : $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$= \sqrt{(-3+2)^2+(3-3)^2}$

$= \sqrt{1} = 1$

3. A(7, 2) ; B(-2, -2)

A(7, 2) ; B(-2, -2 : $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$= \sqrt{(-2-7)^2+(-2-2)^2}$

$= \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$

4. A(a - b, a + b) ; B(0, 0)

A(a-b, a+b) ; B(0, 0) : $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$= \sqrt{(0-(a-b))^2+(0-(a+b))^2}$

$= \sqrt{(-a+b)^2+(-a-b)^2}$

$= \sqrt{a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2}$

$= \sqrt{2(a^2+b)^2}$

5. จงแสดงว่าสามเหลี่ยมที่มีมุมทั้งสามอยู่ที่จุด (-1, 4), (2, 5) และ (0, 1) เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ให้จุด A คือ (-1, 4) , B คือ (2, 5) และจุด C คือ (0, 1)

จาก $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(2+1)^2+(5-4)^2}$

$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

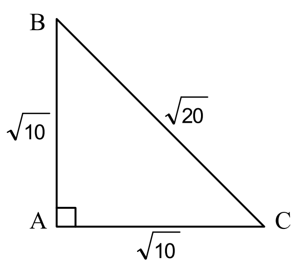
$d_{BC} = \sqrt{(0-2)^2+(1-5)^2}$

$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$d_{AC} = \sqrt{(0+1)^2+(1-4)^2}$

$= \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

เนื่องจาก $(\sqrt{20})^2 = (\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2$, $\therefore$ $BC^2 = AB^2+AC^2$



ดังนั้น จะได้ ABC เป็นรูป Δ มุมฉาก
โดยมีมุม A เป็นมุมฉาก

นั่นคือ สามเหลี่ยมที่มีมุมทั้งสามอยู่ที่จุด (-1, 4) (2, 5) และ (0, 1) เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

6. จงแสดงว่าสามเหลี่ยมที่มีมุมทั้งสามอยู่ที่จุด (-2, 3), (3, -2) และ (2, 5) เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ให้จุด A คือ (-2, 3) , B คือ (3, -2) และ C คือ (2, 5)

จาก $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(3+2)^2+(-2-3)^2}$

$= \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

$d_{BC} = \sqrt{(2-3)^2+(5+2)^2}$

$= \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

เนื่องจากด้าน AB = BC ดังนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

นั่นคือ สามเหลี่ยมที่มีมุมทั้งสามอยู่ที่จุด (-2, 3) , (3, -2) และ (2, 5) เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จากข้อ 7-8 จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด ต่อไปนี้

7. A(2, 4) ; B(3, -5)

จาก $\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$

$\bar{y} = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ จุดกึ่งกลาง คือ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

8. A(-3, -9) ; B(-5, 10)

จาก $\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-3-5}{2} = -\frac{8}{2} = -4$

$\bar{y} = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{-9+10}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ จุดกึ่งกลาง คือ $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$

9. จงแสดงว่า เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมทั้งสี่อยู่ที่จุด $P(1, 3)$, $Q(6, 5)$, $R(10, 4)$ และ $S(5, 2)$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

วิธีทำ จุดกึ่งกลางของ PR $= \left(\frac{1+10}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$

จุดกึ่งกลางของ QS $= \left(\frac{6+5}{2}, \frac{5+2}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$

จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมทั้งสองของ PQRS เป็นจุดเดียวกัน คือ $\left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$

นั่นคือ เส้นทแยงมุมของ PQRS แบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

10. จงหาจุดบนแกน y ซึ่งอยู่ห่างจากจุด (0, 5) และ (0, -1) เป็นระยะทางเท่ากัน

วิธีทำ เนื่องจากจุด (0, 5) และ (0, -1) อยู่บนแกน y ทั้ง 2 จุด

จุดที่อยู่ห่างจากจุด 2 จุดนี้เท่ากัน คือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุดนี้

ดังนั้น จุดกึ่งกลางระหว่าง 2 จุด $= \left(\frac{0+0}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (0, 2)$

จากข้อ 11-14 จงหาความชันของเส้นตรง เมื่อมีมุมเอียงหรือผ่านจุดดังนี้

11. $\theta = 60^{o}$

วิธีทำ จาก $m = \tan\theta = \tan 60^{o} = \sqrt{3} = 1.732$

12. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

วิธีทำ จาก $m = \tan\theta = \tan\frac{2\pi}{3} = \tan 120^{o} = -\tan 60^{o} = -1.732$

13. (-1, 3) , (2, 5)

วิธีทำ จาก $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{2+1} = \frac{2}{3}$

14. (4, -5) , (-2, -5)

วิธีทำ จาก $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5+5}{-2-4} = \frac{0}{-6} = 0$

15. จงหาความชันของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรงที่ต่อจุด $A(4, -3)$ และ $B(-2, 5)$

วิธีทำ จาก $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5+3}{-2-4} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$

นั่นคือ ความชันของเส้นตรงที่ต้องการ คือ $-\frac{4}{3}$

16. จงหาความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ต่อจุด P(1, 1) และ Q(5, -1) พร้อมทั้งวาดรูปด้วย

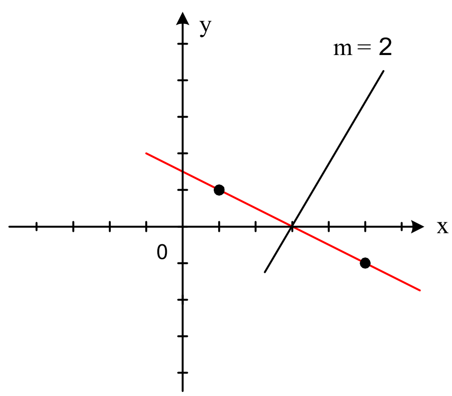
วิธีทำ จาก $m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-1-1}{5-1} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

เนื่องจาก $m_1 m_2 = -1$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)m_2 = -1$$

$$m_2 = -1\left(-\frac{2}{1}\right) = 2$$

นั่นคือ ความชันของเส้นตรงที่ต้องการ คือ 2



17. จงแสดงให้เห็นจริงว่า เส้นตรงที่ผ่านจุด A(1, -2) , B(3, 4) และ C(2, 1) เป็นเส้นตรงเดียวกัน

วิธีทำ จุด A, B, C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $m_{AB} = m_{AC}$

$$m_{AB} = \frac{4+2}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$

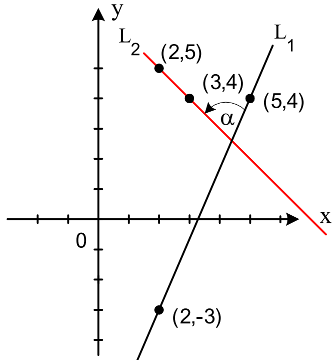
$$m_{AC} = \frac{1+2}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

เนื่องจาก $m_{AB} = m_{AC}$

จะได้จุด A, B และ C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

18. จงหาขนาดของมุม จากเส้นตรง L_1 ที่ผ่านจุด (2, -3) และ (5, 4) ไปยังเส้นตรง L_2 ซึ่งผ่านจุด (2, 5) และ (3, 4)

วิธีทำ



ให้ m_1 เป็นความชันของ L_1

m_2 เป็นความชันของ L_2

จาก $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m_1 = \frac{4+3}{5-2} = \frac{7}{3}$

$m_2 = \frac{4-5}{3-2} = -\frac{1}{1}$, $= -1$

ให้ α เป็นมุมจากเส้นตรง L_1 ไปยัง L_2

จาก $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

$= \frac{-1-\frac{7}{3}}{1+\left(\frac{7}{3}\right)(-1)}$

$= \frac{-\frac{10}{3}}{-\frac{4}{3}} = \left(-\frac{10}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)$

$= \frac{10}{4} = 2.5$

จะได้ $\tan\alpha = 2.5$

นั่นคือ $\alpha = \tan^{-1} 2.5 = 68.20^{o}$

$\therefore = 68.20^{o}$

19. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด A(-3, 2) และ B(4, -1) พร้อมทั้งวาดรูปด้วย

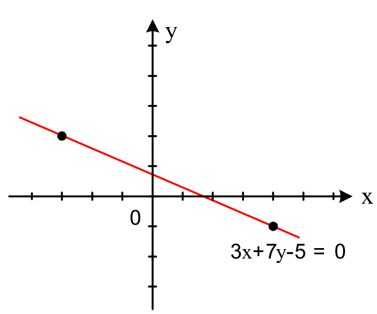
วิธีทำ จาก $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\frac{y-2}{x+3} = \frac{-1-2}{4+3} = -\frac{3}{7}$

$7(y - 2) = -3(x + 3)$

$7y - 14 = -3x - 9$

นั่นคือ สมการของเส้นตรง คือ $3x + 7y - 5 = 0$



20. จงหาสมการของเส้นตรงที่มีความชัน $-\frac{2}{3}$ และผ่านจุด A(4, 1) พร้อมทั้งวาดรูปด้วย

วิธีทำ จาก

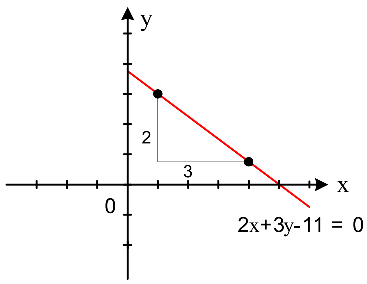
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 4)$$

$$3(y - 1) = -2(x - 4)$$

$$3y - 3 = -2x + 8$$

นั่นคือ สมการของเส้นตรง คือ $2x + 3y - 11 = 0$



21. จงหาสมการของเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{2}{5}$ และมีจุดตัดแกน y เป็น $-\frac{3}{5}$ พร้อมทั้งวาดรูปด้วย

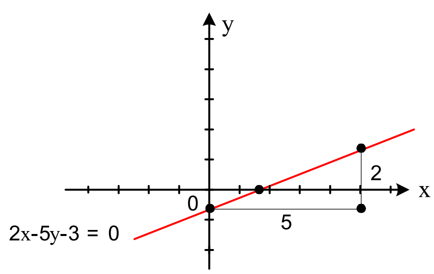
วิธีทำ จาก

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{2}{5}x + \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$5y = 2x - 3$$

นั่นคือ สมการของเส้นตรง คือ $2x - 5y - 3 = 0$



22. จงหาสมการของเส้นตรงที่มีจุดตัดแกน x เป็น -2 และมีจุดตัดแกน y เป็น $\frac{1}{3}$ พร้อมทั้งวาดรูปด้วย

วิธีทำ จาก

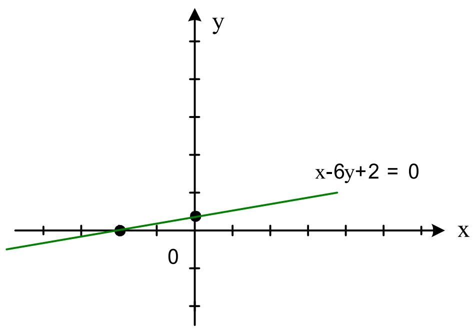
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{1}{3}} = 1$$

$\frac{x}{-2} + 3y = 1$

$-x+6y = 2$

นั่นคือ สมการเส้นตรง คือ $x - 6y + 2 = 0$



23. จงหาสมการของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $2x - 3y + 5 = 0$ และผ่านจุด (2, -3)

วิธีทำ จาก $2x - 3y + 5 = 0$

$3y = 2x + 5$

$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

เส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $2x-3y+5 = 0$ มีความชัน = $\frac{2}{3}$ และผ่านจุด (2, -3)

จาก $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$

$3(y + 3) = 2(x - 2)$

$3y + 9 = 2x - 4$

นั่นคือ สมการเส้นตรง คือ $2x - 3y - 13 = 0$

24. จงหาสมการของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 2y - 3 = 0$ และผ่านจุด (3, -2)

วิธีทำ จาก $x + 2y - 3 = 0$

$2y = -x + 3$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

จะได้เส้นตรง $x + 2y - 3 = 0$ มีความชัน $-\frac{1}{2} = m_1$

จาก $m_1m_2 = -1$

$-\frac{1}{2}m_2 = -1$

$m_2 = 2$

ดังนั้น เส้นตรงที่ตั้งฉากกับ $x + 2y - 3 = 0$ มีความชัน $= 2$ และผ่านจุด $(3, -2)$

จาก

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 2 = 2(x - 3)$$

$$y + 2 = 2x - 6$$

นั่นคือ สมการของเส้นตรง คือ $2x - y - 8 = 0$

25. จงหาระยะทางจากจุด $P(4, 3)$ ไปยังเส้นตรง $6x - 8y + 10 = 0$

วิธีทำ จาก

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|6(4) + (-8)(3) + 10|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}}$$

$$= \frac{|10|}{\sqrt{100}} = 1$$

นั่นคือ จะได้ระยะที่ต้องการ คือ 1 หน่วย

26. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x + y - 4 = 0$ กับเส้นตรง $2x - y + 5 = 0$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x+4y-7 = 0$

วิธีทำ 1. หาจุดที่เส้นตรง $x + y - 4 = 0$ กับเส้นตรง $2x - y + 5 = 0$ ตัดกันก่อน

ให้

$$x + y = 4 \quad \text{...(1)}$$

$$2x - y = -5 \quad \text{...(2)}$$

(1) + (2) $3x = -1$, $x = -\frac{1}{3}$

นำ $x = -\frac{1}{3}$ แทนใน (1) จะได้

$$-\frac{1}{3} + y = 4 , \quad y = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$$

ดังนั้น จุดที่เส้นตรงทั้งสองตัดกัน คือ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$

2. หาความชัน (m_2) ของเส้นตรงที่ผ่านจุด $\left(-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x + 4y - 7 = 0$ ซึ่งมีความชัน m_1

จาก

$$3x + 4y - 7 = 0$$

$$4y = -3x+7$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

จะได้

$$m_1 = -\frac{3}{4}$$

จาก

$$m_1 m_2 = -1$$

$$-\frac{3}{4} m_2 = -1$$

$m_2 \quad = \quad -1\left(-\frac{4}{3}\right) \quad = \quad \frac{4}{3}$

3. หาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $\left(-\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$ และมีความชัน $\frac{4}{3}$

จาก $\quad y - y_1 \quad = \quad m_1(x - x_1)$

$y - \frac{13}{3} \quad = \quad \frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)$

$y - \frac{13}{3} \quad = \quad \frac{4x}{3} + \frac{4}{9}$

นำ 9 คูณตลอด $\quad 9y - 39 \quad = \quad 12x + 4$

นั่นคือ สมการของเส้นตรงที่ต้องการ คือ $12x - 9y + 43 = 0$

27. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่ต่อจุด A(2, 3) และ B(-3, 5) และผ่านจุดตัดของเส้นตรง $4x - y + 8 = 0$ และเส้นตรง $x + y - 2 = 0$

วิธีทำ 1. หาจุดกึ่งกลางของ (2, 3) และ (-3, 5)

จาก $\quad \bar{x} \quad = \quad \frac{2-3}{2} \quad = \quad -\frac{1}{2}$

$\bar{y} \quad = \quad \frac{3+5}{2} \quad = \quad 4$

$\therefore$ จุดกึ่งกลางคือ $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ ซึ่งเป็นจุดที่เส้นตรงผ่าน

2. หาจุดตัดของเส้นตรง $4x - y + 8 = 0$ และเส้นตรง $x + y - 2 = 0$

ให้ $\quad 4x - y \quad = \quad -8 \qquad \ldots(1)$

$x + y \quad = \quad 2 \qquad \ldots(2)$

(1) + (2) $\quad 5x \quad = \quad -6 \quad , \quad x \quad = \quad -\frac{6}{5}$

แทน $x = -\frac{6}{5}$ ใน (2) จะได้

$-\frac{6}{5} + y \quad = \quad 2 \quad , \quad y \quad = \quad 2 + \frac{6}{5} \quad = \quad \frac{16}{5}$

$\therefore$ จุดที่เส้นตรงทั้งสองตัดกัน คือ $\left(-\frac{6}{5}, \frac{16}{5}\right)$

3. หาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ และ $\left(-\frac{6}{5}, \frac{16}{5}\right)$

จาก $\quad \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad = \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\frac{y - 4}{x + \frac{1}{2}} \quad = \quad \frac{\frac{16}{5} - 4}{-\frac{6}{5} + \frac{1}{2}}$

$$\frac{y-4}{x+\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{7}{10}} = \frac{8}{7}$$

$$7(y - 4) = 8(x + \frac{1}{2})$$

$$7y - 28 = 8x + 4$$

นั่นคือ สมการของเส้นตรง คือ $8x - 7y + 32 = 0$

28. จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง $3x - 4y - 9 = 0$ และเส้นตรง $3x - 4y + 11 = 0$

วิธีทำ หาจุดบนเส้นตรง $3x - 4y - 9 = 0$

กำหนด $x = 0$ จะได้ $0 - 4y - 9 = 0$, $y = -\frac{9}{4}$

จะได้จุด $(0, -\frac{9}{4})$ อยู่บนเส้นตรง $3x - 4y - 9 = 0$

หาระยะจากจุด $(0, -\frac{9}{4})$ มายังเส้นตรง $3x - 4y + 11 = 0$

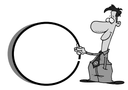
จาก

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|3(0) + (-4)(-\frac{9}{4}) + 11|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$= \frac{|20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

นั่นคือ ระยะระหว่างเส้นตรงทั้งสอง เท่ากับ 4 หน่วย



จงแสดงวิธีทำ

เรื่อง : วงกลม

1. จงหาสมการวงกลมและส่วนของวงกลมต่อไปนี้

1.1 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รัศมียาว 7 หน่วย

วิธีทำ $x^2 + y^2 = r^2$

$x^2 + y^2 = 7^2 = 49$

สมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 - 49 = 0$

1.2 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (5, 6) และเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 16 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 8^2$

$x^2 + y^2 - 10x - 12y - 3 = 0$

1.3 สมการวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 20 = 0$ มีจุดศูนย์กลางและรัศมีเท่าใด

วิธีทำ $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 20 = 0$

$(x^2 - 4x) + (y^2 + 10y) = 20$

$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 20 + 4 + 25$

$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 49 = 7^2$

จุดศูนย์กลางคือ (2, -5) และรัศมี 7 หน่วย

2. กำหนดให้วงกลมมีจุดศูนย์กลาง (5, 6) และมีเส้นตรง $6x - 8y - 2 = 0$ เป็นเส้นสัมผัส จงตอบคำถามข้อ 2.1 – 2.3

2.1 จงหารัศมีของวงกลมที่กำหนด

วิธีทำ สูตร $$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|6(5) - 8(6) - 2|}{\sqrt{6^2 + 8^2}}$$

$$= \frac{|-20|}{10} = 2$$

รัศมี = 2 หน่วย

2.2 จงหาสมการวงกลมที่กำหนด

วิธีทำ สูตรสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

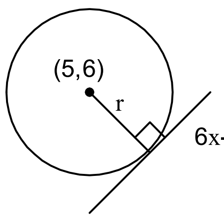
$(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 2^2$

$$x^2 + y^2 - 5x - 12y + 57 = 0$$

2.3 ความชันของรัศมีของวงกลมที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส $6x - 8y - 2 = 0$

วิธีทำ สมการ $6x - 8y - 2 = 0$

มีความชัน $= \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$



$6x-8y-2 = 0$

จากรูปรัศมี (r) จะตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเสมอ

ดังนั้น ความชันเส้นสัมผัส $\times$ ความชันของรัศมี $= -1$

$\frac{3}{4} \times$ ความชันของรัศมี $= -1$

ความชันของรัศมี $= \frac{-4}{3}$

2.4 จงหาสมการของวงกลมที่ผ่านจุด (1, -1), (-3, -3) และ (0, 1) พร้อมทั้งหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของ วงกลมด้วย

วิธีทำ วงกลมผ่านจุด (1, -1), (-3, -3) และ (0, 1)

$x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$

$1 + 1 + C - D + E = 0$

$C - D + E = -2$ …(1)

และ $9 + 9 - 3C - 3D + E = 0$

$3C + 3D - E = 18$ …(2)

และ $0 + 1 + D + E = 0$

$D + E = -1$ …(3)

(2) - 3(1) $6D - 4E = 24$ …(4)

(3) $\times$ 4 $4D + 4E = -4$ …(5)

(4)+(5) $10D = 20$

$D = 2$

จาก (3) , $E = -3$

จาก (1) $C = -2 + D - E$

$= -2 + 2 + 3 = 3$

สมการของวงกลม คือ $x^2 + y^2 + 3x + 2y - 3 = 0$

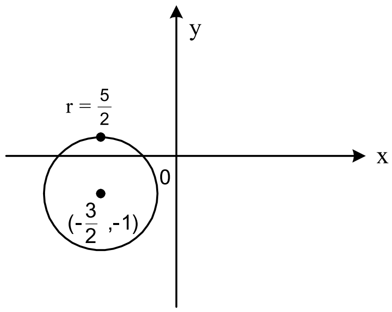
$x^2 + 3x + y^2 + 2y = 3$

$x^2 + 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 2y + 1 = 3 + \frac{9}{4} + 1$

$(x + \frac{3}{2})^2 + (y + 1)^2 = \frac{25}{4}$

$(x + \frac{3}{2})^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

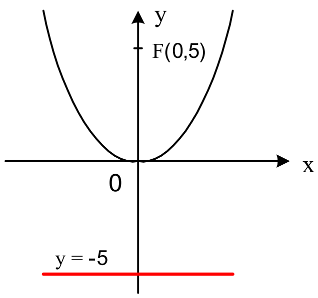
จุดศูนย์กลาง คือจุด $(-\frac{3}{2}, -1)$, รัศมียาว $\frac{5}{2}$ หน่วย



เรื่อง : พาราโบลา

จากข้อ 3-7 จงหาสมการของพาราโบลาพร้อมทั้งวาดรูปทุกข้อ

3. จุดโฟกัส คือ จุด (0, 5) จุดยอด คือ (0, 0)

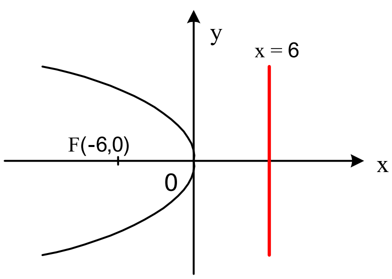


วิธีทำ $F(0, 5)$ และ $V(0, 0)$

จาก
$$x^2 = 4|c|y = 4|5|y = 20y$$

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 20y$

4. จุดโฟกัส คือ จุด (-6, 0) จุดยอด คือ (0, 0)

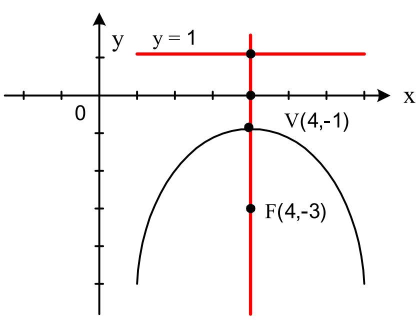


วิธีทำ $F(-6, 0)$ และ $V(0, 0)$

จาก
$$y^2 = -4|c|x = -4|-6|x = -24x$$

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $y^2 = -24x$

5. จุดโฟกัส คือ จุด (4, -3) จุดยอด คือ (4, -1)

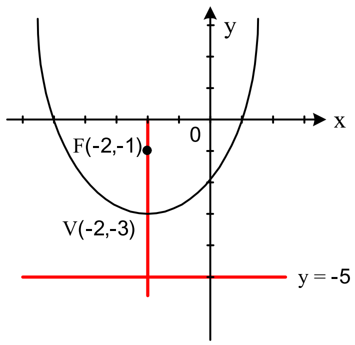


วิธีทำ $F(4, -3)$ และ $V(4, -1)$

จาก
$$(x-h)^2 = -4|c|(y-k)$$
$$(x-4)^2 = -4|2|(y+1)$$
$$x^2 - 8x + 16 = -8y - 8$$
$$x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$$

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$

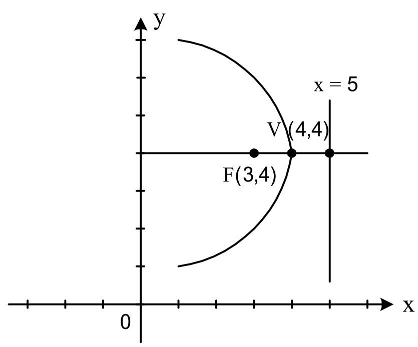
6. จุดโฟกัส คือ จุด (-2, -1)   ไดเร็กทริกซ์ คือ $y = -5$



วิธีทำ F(-2, -1) และไดเร็กทริกซ์ คือ $y = -5$

จาก
$$(x-h)^2 = 4|c|(y-k)$$
$$(x+2)^2 = 4|2|(y+3)$$
$$x^2+4x+4 = 8y+24$$
$$x^2+4x-8y-20 = 0$$

7. จุดโฟกัส คือ จุด (3, 4)   ไดเร็กทริกซ์ คือ $x = 5$



วิธีทำ F(3, 4) และไดเร็กทริกซ์ คือ $x = 5$

จาก
$$(y-k)^2 = -4|c|(x-h)$$
$$(y-4)^2 = -4|1|(x-4)$$
$$y^2-8y+16 = -4x+16$$
$$y^2-8y+4x = 0$$

จากข้อ 8-9 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส ไดเร็กทริกซ์ แกนของพาราโบลา และความยาวของ เลตัสเร็กตัม

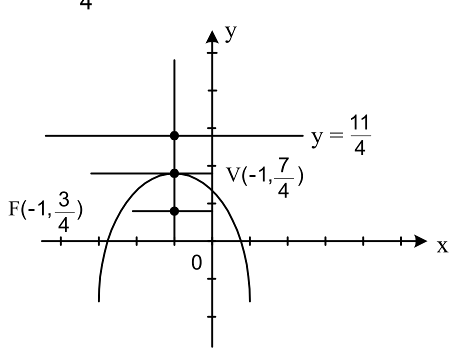
8. $x^2+2x+4y-6 = 0$

วิธีทำ
$$x^2+2x+4y-6 = 0$$
$$x^2+2x = -4y+6$$
$$x^2+2x+1 = -4y+7$$
$$(x+1)^2 = -4(y-\frac{7}{4})$$

$h = -1$, $k = \frac{7}{4}$ และ $c = 1$

จุดยอด คือ $V(-1, \frac{7}{4})$, จุดโฟกัส คือ $F(-1, \frac{3}{4})$

ไดเร็กทริกซ์ คือ $y = \frac{11}{4}$, เลตัสเร็กตัมยาว 4 หน่วย



9. $y^2 + 6y + 4x - 12 = 0$

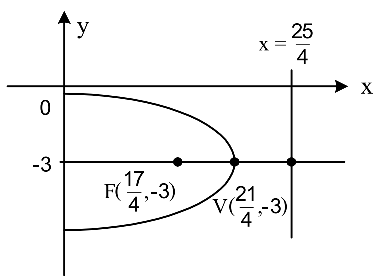
วิธีทำ

$$y^2 + 6y + 4x - 12 = 0$$
$$y^2 + 6y = -4x + 12$$
$$y^2 + 6y + 9 = -4x + 21$$
$$(y + 3)^2 = -4(x - \frac{21}{4})$$

$h = \frac{21}{4}$, $k = -3$ และ $c = 1$

จุดยอด คือ $V(\frac{21}{4}, -3)$, จุดโฟกัส คือ $F(\frac{17}{4}, -3)$

ไดเร็กทริกซ์ คือ $x = \frac{25}{4}$, เลตัสเร็กตัมยาว 4 หน่วย



เรื่อง : วงรี

จากข้อ 10-13 จงหาสมการของวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

10. ความยาวของแกนหลักเท่ากับ 8 หน่วย และความยาวของแกนรองเท่ากับ 4 หน่วย โดยมีแกนหลักขนานกับแกน x

วิธีทำ

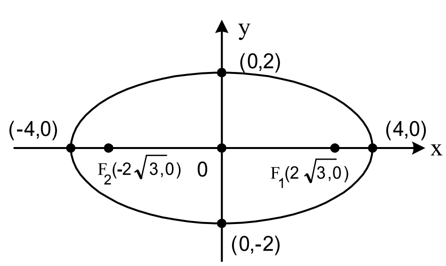
$2a = 8$ และ $2b = 4$

$a = 4$ และ $b = 2$

$c = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$
$$4x^2 + 16y^2 = 64$$

ดังนั้น สมการของวงรี คือ $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$



11. จุดยอดอยู่ที่จุด (0, 5) และจุด (0, -5) และโฟกัสอยู่ที่จุด (0, 3) และ (0, -3)

วิธีทำ $V_1(0, 5)$, $V_2(0, -5)$, $F_1(0, 3)$ และ $F_2(0, -3)$

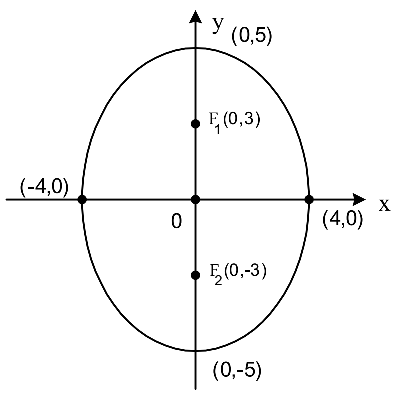
$a = 5$, $C = 3$

$b = \sqrt{25-9} = 4$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25} = 1$

$25x^2 + 16y^2 = 400$

ดังนั้น สมการของวงรี คือ $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$



12. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (4, 0) และจุด (-4, 0) และมีค่า $e = 0.8$

วิธีทำ $F_1(4, 0)$, $F_2(-4, 0)$ และ $e = 0.8$

$c = 4$

$e = \frac{c}{a} = 0.8$

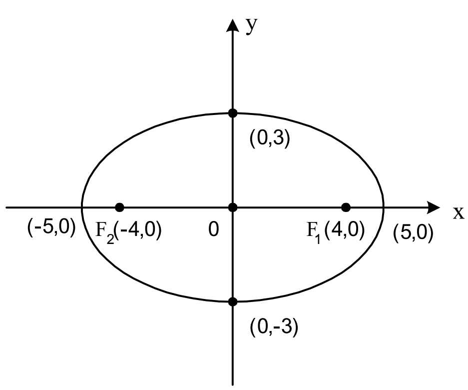
$a = \frac{c}{0.8} = \frac{4}{0.8} = 5$

$b = \sqrt{25-16} = 3$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$

$9x^2 + 25y^2 = 225$

ดังนั้น สมการของวงรี คือ $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$



13. **จงหาจุดโฟกัสค่า e ความยาวของแกนหลัก และความยาวของแกนรองของวงรีที่มีสมการ**

$12x^2+16y^2-192 = 0$

วิธีทำ

$$12x^2 + 16y^2 - 192 = 0$$

$$12x^2 + 16y^2 = 192$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12} = 1$$

$$a = 4 \quad , \quad b = 2\sqrt{3}$$

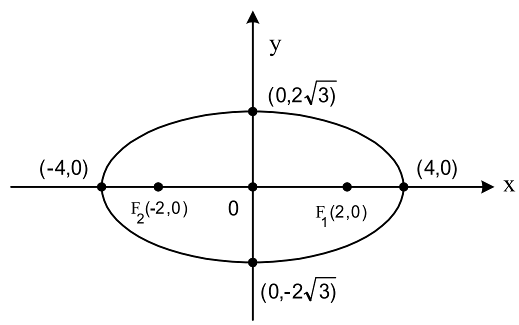
$$c = \sqrt{16-12} = 2$$

จุดโฟกัส คือ $F_1(2, 0)$ และ $F_2(-2, 0)$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{4} = 0.5$$

ความยาวของแกนหลัก = 8 หน่วย

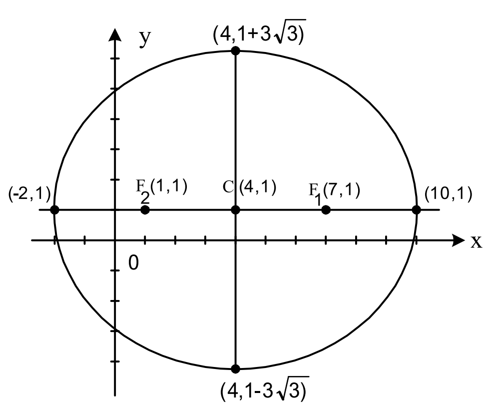
ความยาวของแกนรอง = $4\sqrt{3}$ หน่วย



จากข้อ 14-17 กำหนดให้วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

14. **จงหาสมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (4, 1) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (1, 1) และจุด (7, 1) และมีความยาวคงตัวเท่ากับ 12 หน่วย**

วิธีทำ $C(4, 1)$, $F_1(7, 1)$, $F_2(1, 1)$ และ $2a = 12$



$c = 3$ และ $a = 6$

$b = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$$\frac{(x-4)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{27} = 1$$

$$27(x^2 - 8x + 16) + 36(y^2 - 2y + 1) = 972$$

$$27x^2 + 36y^2 - 216x - 72y + 432 + 36 = 972$$

ดังนั้น สมการของวงรี คือ $27x^2 + 36y^2 - 216x - 72y - 504 = 0$

15. จงหาสมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-3, 2) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด (-7, 2) และจุด (1, 2) และมีค่า e = 0.8

วิธีทำ $C(-3, 2)$, $F_1(1, 2)$, $F_2(-7, 2)$ และ $e = 0.8$

$c = 4$, $\frac{c}{a} = 0.8$

$a = \frac{4}{0.8} = 5$

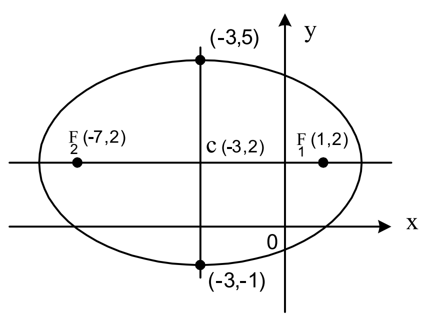
$b = \sqrt{25-16} = 3$

$$\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

$$9(x^2 + 6x + 9) + 25(y^2 - 4y + 4) = 225$$

$$9x^2 + 54x + 81 + 25y^2 - 100y + 100 = 225$$

ดังนั้น สมการของวงรี คือ $9x^2 + 25y^2 + 54x - 100y - 44 = 0$



16. จงหาสมการของวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (-1, 7) และจุด (-1, -3) และมีค่า e = 0.6 พร้อมทั้งหาจุดศูนย์กลางและโฟกัส

วิธีทำ $V_1(-1, 7)$, $V_2(-1, -3)$ และ $e = 0.6$

$a = 5$, $\frac{c}{a} = 0.6$

$c = 3$, $b = \sqrt{25-9} = 4$

จุดศูนย์กลาง คือ (-1, 2)

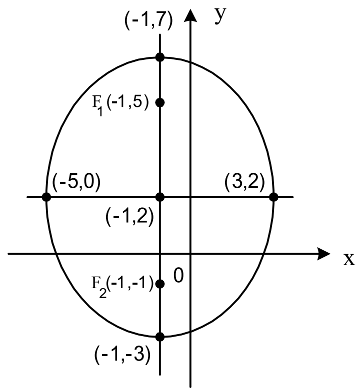
จุดโฟกัส คือ $F_1(-1, 5)$ และ $F_2(-1, -1)$

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

$25(x^2 + 2x + 1) + 16(y^2 - 4y + 4) = 400$

$25x^2 + 16y^2 + 50x - 64y - 311 = 0$

ดังนั้น สมการของวงรี คือ $25x^2 + 16y^2 + 50x - 64y - 311 = 0$



17. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด ค่า e ความยาวของแกนหลัก ความยาวของแกนรองของวงรี $5x^2 + 12y^2 - 30x + 24y - 3 = 0$

วิธีทำ

$5x^2 + 12y^2 - 30x + 24y = 3$

$5(x^2 - 6x) + 12(y^2 + 2y) = 3$

$5(x^2 - 6x + 9) + 12(y^2 + 2y + 1) = 3 + 45 + 12$

$\frac{(x-3)^2}{12} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$

$h = 3$, $k = -1$, $a = \sqrt{12}$ และ $b = \sqrt{5}$

$c = \sqrt{12-5} = \sqrt{7}$

จุดศูนย์กลาง คือ (3, -1)

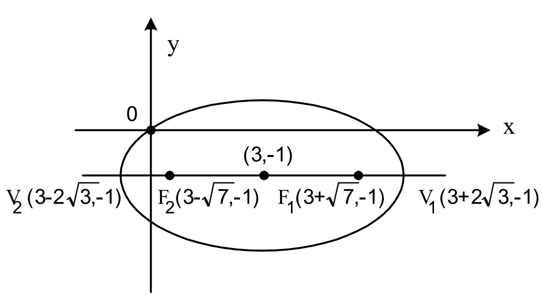
จุดโฟกัส คือ จุด $F_1(3+\sqrt{7}, -1)$ และ $F_2(3-\sqrt{7}, -1)$

$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{7}{12}} \approx 0.764$

จุดยอด คือ $V_1(3+2\sqrt{3}, -1)$ และ $V_2(3-2\sqrt{3}, -1)$

ความยาวของแกนหลัก = $4\sqrt{3}$ หน่วย

ความยาวของแกนรอง = $2\sqrt{5}$ หน่วย



เรื่อง : ไฮเพอร์โบลา

จากข้อ 18-19 กำหนดให้จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่จุดกำเนิด

18. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา จุดยอด สมการเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด (-4, 0) และ (4, 0) และมีค่าคงที่เป็น 6 พร้อมทั้งวาดรูป

วิธีทำ $F_1(4, 0)$, $F_2(-4, 0)$ และ $2a = 6$

$a = 3$

$c = 4$

$b = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

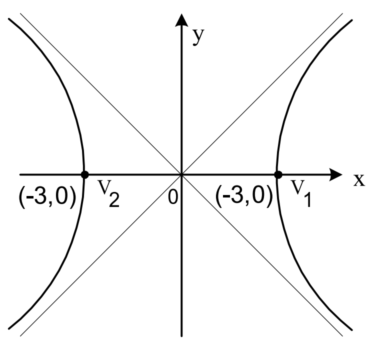
$e = \frac{c}{a} = 1.33$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

สมการของไฮเพอร์โบลา คือ $7x^2 - 9y^2 - 63 = 0$

จุดยอด คือ $V_1(3, 0)$ และ $V_2(-3, 0)$

สมการของเส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$



19. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา สมการเส้นกำกับ ค่า e ของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (0, -3) และจุด (0, 3) และมีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด (0, -5) และ (0, 5)

วิธีทำ $V_1(0, 3)$, $V_2(0, -3)$ และ $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$

$c = 5$

$a = 3$

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

จาก $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

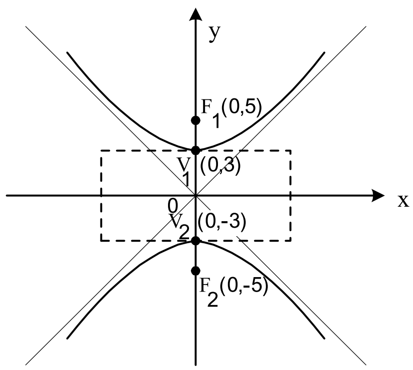
$16y^2 - 9x^2 = 144$

$16y^2 - 9x^2 - 144 = 0$

สมการของไฮเพอร์โบลา คือ $16y^2 - 9x^2 - 144 = 0$

สมการของเส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{3}{4}x$

$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$



20. จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการของเส้นกำกับไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $9x^2-4y^2-36 = 0$

วิธีทำ $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$

$9x^2 - 4y^2 = 36$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

$a = 2$

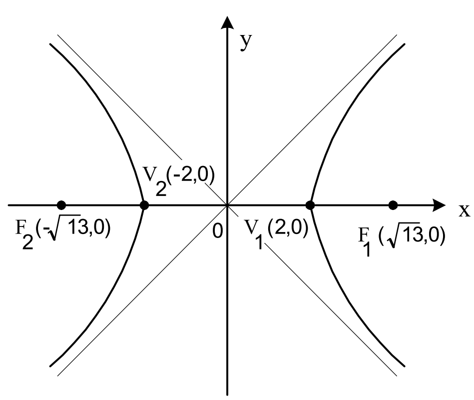
$b = 3$

$c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

จุดยอด คือ $V_1(2, 0)$ และ $V_2(-2, 0)$

จุดโฟกัส คือ $F_1(\sqrt{13}, 0)$ และ $F_2(-\sqrt{13}, 0)$

สมการเส้นกำกับ คือ $y = \pm 1.5x$



21. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา จุดศูนย์กลาง จุดยอด สมการของเส้นกำกับไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด (2, -3) และ (8, -3) และค่า e = 1.5

วิธีทำ $F_1(8, -3)$, $F_2(2, -3)$ และ e = 1.5

$$c = 3$$

$$\frac{c}{a} = 1.5$$

$$a = \frac{3}{1.5} = 2$$

$$b = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

จุดศูนย์กลาง คือ $C(5, -3)$

h = 5 และ k = -3

จุดยอด คือ $V_2(3, -3)$ และ $V_1(7, -3)$

$$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{5} = 1$$

$$5(x^2 - 10x + 25) - 4(y^2 + 6y + 9) = 20$$

$$5x^2 - 50x + 125 - 4y^2 - 24y - 36 = 20$$

สมการของไฮเปอร์โบลา คือ

$$5x^2 - 4y^2 - 50x - 24y + 69 = 0$$

สมการของเส้นกำกับ คือ

$$y + 3 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-5)$$

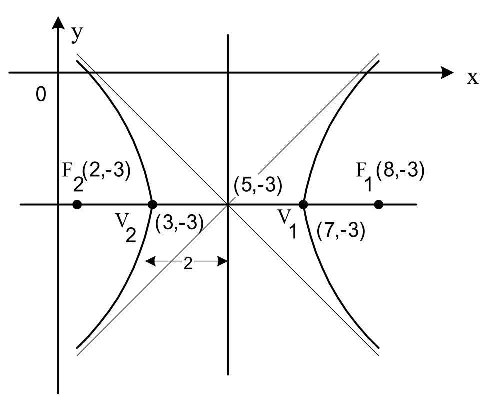
$$2y + 6 = \sqrt{5}x - 5\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5}x - 2y - 6 - 5\sqrt{5} = 0$$

และ

$$2y + 6 = -\sqrt{5}x + 5\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5}x + 2y + 6 - 5\sqrt{5} = 0$$



22. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา สมการของเส้นกำกับ จุดศูนย์กลาง ค่า e ของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด (-4, 2) และจุด (6, 2) และมีจุดยอดอยู่ที่ (-3, 2) และจุด (5, 2)

วิธีทำ $F_1(6, 2)$, $F_2(-4, 2)$, $V_2(-3, 2)$ และ $V_1(5, 2)$

$a = 4$ และ $c = 5$

$b = \sqrt{25-16} = 3$

$e = \frac{5}{4} = 1.25$

จุดศูนย์กลาง คือ $C(1, 2)$

$h = 1$ และ $k = 2$

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 - 4y + 4) = 144$$

$$9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y + 9 - 64 = 144$$

สมการของไฮเปอร์โบลา คือ

$$9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y - 199 = 0$$

สมการของเส้นกำกับ คือ

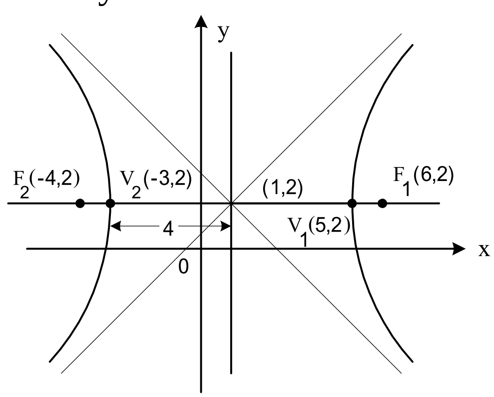
$$y - 2 = \pm\frac{3}{4}(x - 1)$$

$$4y - 8 = 3x-3$$

$$3x - 4y + 5 = 0$$

และ $-4y + 8 = 3x-3$

$$3x + 4y - 11 = 0$$



แบบฝึกหัด ที่ ผู้เรียนเทียบโอนต้องทำ . เลือกทำให้ได้ 100 ข้อ