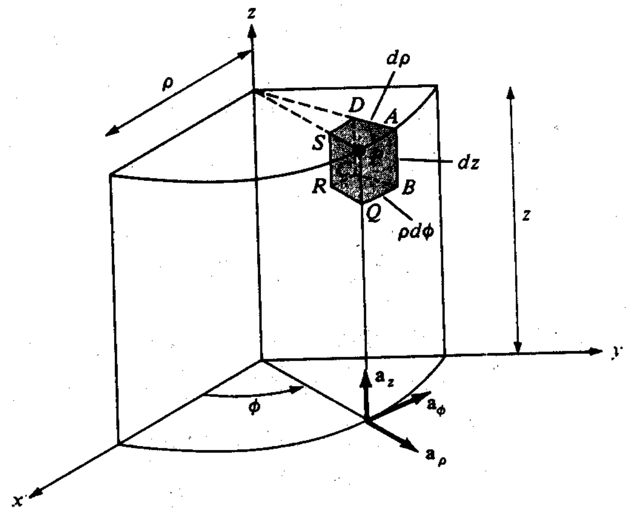
# บทที่ 1.3 ระบบพิกัดและการแปลง

## 1.3.1 ระบบพิกัดทรงกระบอก (Circular Cylindrical Coordinate System)




**ระบบพิกัดทรงกระบอก** เป็นระบบที่ใช้บอกตำแหน่งของจุดในสเปซด้วยพิกัด ( ρ , ϕ , Z ) หรือ ( r , ϕ , Z ) ดังรูป โดย ρ หรือ r คือรัศมีของทรงกระบอก หรือระยะห่างจากแกน Z

ϕ เป็นมุมในระนาบ XY ที่วัดจากแกน X ไปยังแนว ρ

Z เป็นระยะจากระนาบ XY ถึงจุดนั้น : จุด P( ρ , ϕ , Z ) จึงเป็นจุดบนผิวทรงกระบอก

**เวกเตอร์หน่วยในระบบพิกัดทรงกระบอก** ประกอบด้วย $\vec{a}_\rho, \vec{a}_\phi, \vec{a}_z$ ดังรูป โดยที่จุดใดๆ

$\vec{a}_\rho$ มีทิศชี้ไปตามการเคลื่อนที่ ของจุดนั้น เมื่อ ρ เพิ่มขึ้น แต่ ϕ , Z คงที่ (แนวเพิ่มρ)

$\vec{a}_\phi$ มีทิศชี้ไปตามการเคลื่อนที่ ของจุดนั้น เมื่อ ϕ เพิ่มขึ้น แต่ ρ , Z คงที่ (แนวเพิ่มϕ)

$\vec{a}_z$ มีทิศชี้ไปตามการเคลื่อนที่ ของจุดนั้น เมื่อ Z เพิ่มขึ้น แต่ ρ , ϕ คงที่ (แนวเพิ่มZ)

จากรูปจะพิจารณาได้ว่า $\vec{a}_\rho$ และ $\vec{a}_\phi$ มีทิศทางต่างกันไปสำหรับแต่ละจุด(ไม่คงที่) แต่ $\vec{a}_z$ คงที่ทั้งขนาดและทิศทาง(เป็นเวกเตอร์ตัวเดียวกับ $\vec{a}_z$ ในระบบพิกัดฉาก) เช่นเดียวกับ $\vec{a}_x$ , $\vec{a}_y$ และเวกเตอร์หน่วย $\vec{a}_\rho, \vec{a}_\phi, \vec{a}_z$ ณ จุดหนึ่งๆ จะมีทิศตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังนั้น

$$\vec{a}_\rho \cdot \vec{a}_\rho = \vec{a}_\phi \cdot \vec{a}_\phi = \vec{a}_z \cdot \vec{a}_z = 1$$

$$\vec{a}_\rho \cdot \vec{a}_\phi = \vec{a}_\phi \cdot \vec{a}_z = \vec{a}_z \cdot \vec{a}_\rho = 0$$

และ

$$\vec{a}_\rho \times \vec{a}_\rho = \vec{a}_\phi \times \vec{a}_\phi = \vec{a}_z \times \vec{a}_z = 0$$

$$\vec{a}_\rho \times \vec{a}_\phi = \vec{a}_z , \ \vec{a}_\phi \times \vec{a}_z = \vec{a}_\rho , \ \vec{a}_z \times \vec{a}_\rho = \vec{a}_\phi$$

**องค์ประกอบของเวกเตอร์และพีชคณิตเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกระบอก**

เวกเตอร์ๆ $\vec{A}$ เขียนในรูปองค์ประกอบในระบบพิกัดทรงกระบอก ได้เป็น

$\vec{A} = A_\rho \vec{a}_\rho + A_\phi \vec{a}_\phi + A_z \vec{a}_z$ เมื่อ

$A_\rho = \vec{A}\vec{a}_\rho, A_\phi = \vec{A}\vec{a}_\phi, A_Z = \vec{A}\vec{a}_z$ เป็นองค์ประกอบตามแนวของ $\vec{A}$ ตามแนวเวกเตอร์หน่วย $\vec{a}_\rho, \vec{a}_\phi, \vec{a}_z$ ตามลำดับ

จากการเขียนเวกเตอร์ในรูปองค์ประกอบเช่นนี้ จะแสดงได้ว่า

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_\rho \pm B_\rho)\vec{a}_\rho + (A_\phi \pm B_\phi)\vec{a}_\phi + (A_Z \pm B_Z)\vec{a}_z$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_\rho B_\rho + A_\phi B_\phi + A_Z B_Z$$

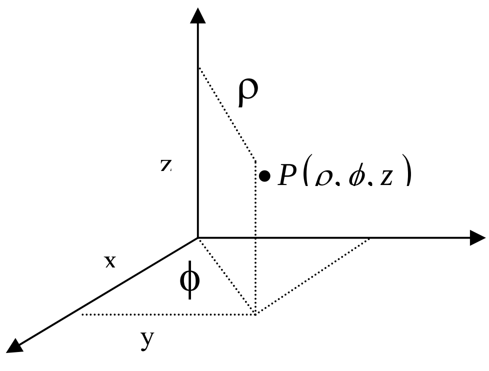
$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_\phi B_Z - A_Z B_\phi)\vec{a}_\rho + (A_Z B_\rho - A_\rho B_Z)\vec{a}_\phi + (A_\rho B_\phi - A_\phi B_\rho)\vec{a}_z$$

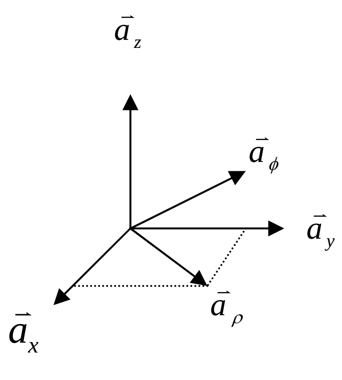
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{a}_\rho & \vec{a}_\phi & \vec{a}_z \\ A_\rho & A_\phi & A_Z \\ B_\rho & B_\phi & B_Z \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{m}\vec{A} = (mA_\rho)\vec{a}_\rho + (mA_\phi)\vec{a}_\phi + (mA_Z)\vec{a}_z$$

$$\vec{A} \bullet \vec{A} = A^2 = A_\rho^{\ 2} + A_\phi^{\ 2} + A_Z^{\ 2} \quad \text{และ} \quad A = \sqrt{A_\rho^{\ 2} + A_\phi^{\ 2} + A_Z^{\ 2}}$$

**ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกระบอกกับพิกัดฉาก**




**ตัวแปร** X = ρ COS φ $\qquad$ ρ = $\sqrt{x^2 + y^2}$

Y = ρ SIN φ $\qquad$ และ $\qquad$ φ = $\tan^{-1}\left(y/x\right)$

Z = Z $\qquad$ Z = Z

**เวกเตอร์หน่วย** $\vec{a}_x = \cos\phi\, \vec{a}_p - \sin\phi\, \vec{a}_\phi$ $\qquad$ $\vec{a}_p = \cos\phi\, \vec{a}_x + \sin\phi\, \vec{a}_y$

$\vec{a}_y = \sin\phi\, \vec{a}_p + \cos\phi\, \vec{a}_\phi$ และ $\vec{a}_\phi = -\sin\phi\, \vec{a}_x + \cos\phi\, \vec{a}_y$

$\vec{a}_z = \vec{a}_z$ $\qquad$ $\vec{a}_z = \vec{a}_z$

ดังนั้น $\vec{a}_p . \vec{a}_x = \cos\phi$ , $\vec{a}_\phi . \vec{a}_x = -\sin\phi$ , $\vec{a}_z . \vec{a}_z = 0$

$\vec{a}_p . \vec{a}_y = \sin\phi$ , $\vec{a}_\phi . \vec{a}_y = \cos\phi$ , $\vec{a}_z . \vec{a}_y = 0$

$\vec{a}_p . \vec{a}_z = 0$ , $\vec{a}_\phi . \vec{a}_z = 0$ , $\vec{a}_z . \vec{a}_z = 0$

การ Dot Product ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดทรงกระบอกกับพิกัดฉากสรุปเป็นตาราง ได้ดังนี้

| | $\vec{a}_p$ | $\vec{a}_\phi$ | $\vec{a}_z$ |
|---|---|---|---|
| $\vec{a}_x$ | $\cos\phi$ | $-\sin\phi$ | O |
| $\vec{a}_y$ | $\sin\phi$ | $\cos\phi$ | O |
| $\vec{a}_z$ | O | O | 1 |

**องค์ประกอบของเวกเตอร์**

$Ax = \vec{A} \bullet \vec{a}_x = \cos\phi\, A_p . \sin\phi\, A_\phi$ และ $A_p = \vec{A} \bullet \vec{a}_\rho = \cos\phi\, Ax + \sin\phi\, Ay$

$Ay = \vec{A} \bullet \vec{a}_y = \sin\phi\, A_p + \cos\phi\, A_\phi$ $\qquad$ $A_\phi = \vec{A} \bullet \vec{a}_\phi = -\sin\phi\, Ax + \cos\phi\, Ay$

$\vec{A}_z = \vec{A}_z$ $\qquad$ $\vec{A}_z = \vec{A}_z$

**ตัวอย่างที่ 1** จงเปลี่ยนจากเวกเตอร์ $\vec{B} = y\vec{a}_x - x\vec{a}_y + z\vec{a}_z$ สู่ระบบพิกัดทรงกระบอก

**วิธีทำ** $\vec{B}$ ทรงกระบอก $= B_\rho \vec{a}_\rho + B_\phi \vec{a}_\phi + B_z \vec{a}_z$

$$B_\rho = \vec{B} \bullet \vec{a}_\rho = y\left(\vec{a}_x . \vec{a}_\rho\right) - x\left(\vec{a}_y . \vec{a}_\rho\right)$$

$$= Y \cos\phi - X \sin\phi = \rho \sin\phi \cos\phi - \rho \cos\phi \sin\phi = 0$$

$$B_\phi = \vec{B} \bullet \vec{a}_\phi = y\left(\vec{a}_x . \vec{a}_\phi\right) - x\left(\vec{a}_y . \vec{a}_\phi\right)$$

$$= -Y \sin\phi - X \cos\phi = -\rho \sin^2\phi - \rho \cos^2\phi = -\rho$$

$$B_Z = \vec{B} \bullet \vec{a}_z = z\vec{a}_z$$

$$\therefore\ \vec{B}_{\cdot Ã§¡ÃÐºÍ¡} = -\rho\vec{a}_\phi + z\vec{a}_z \text{ ........ } \mu Í^o$$

**ตัวอย่างที่ 2** จงหาระยะห่างระหว่างจุด P(10,90°,5) กับจุด (ก) A(15,90°,5) (ข) B(10,270°,5) (ค) C(0,126°,4.83)

**วิธีทำ** P(10,90°,5) = P( x = ρ COSϕ, y = ρ SINϕ, z = z)

= P(10 COS 90°, 10SIN 90°, 5) = P(0,10,5)

A(15,90°,5) = A(0,15,5)

B(10,270°,5) = B(0,-10,5)

C(0,126°,4.83) = C(0,0,4.83)

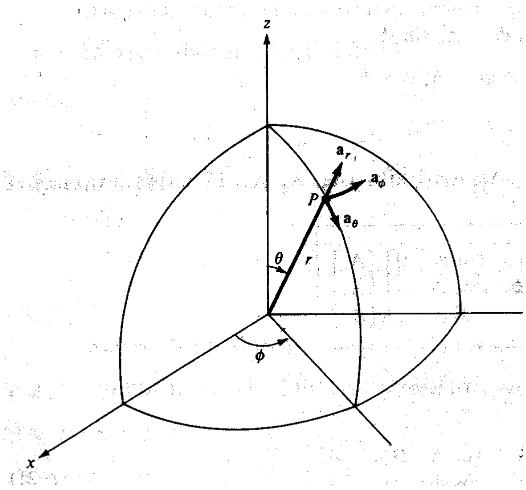
(ก) ระยะ PA = $\left|\overrightarrow{PA}\right|$ = 15-10 = 5 หน่วย **ตอบ**

(ข) ระยะ PB = $\left|\overrightarrow{PB}\right| = \left|-10-10\right| = 20$ หน่วย **ตอบ**

(ค) ระยะ PC = $\left|\overrightarrow{PC}\right|$ ; $\overrightarrow{PC} = -10\vec{a}_x - 0.17\vec{a}_z$

$\left|\overrightarrow{PC}\right| = \sqrt{(-10)^2 + (-0.17)^2} \cong 10$ หน่วย **ตอบ**

**1.3.2 ระบบพิกัดทรงกลม(Spherial Coordinate System)**




ระบบพิกัดทรงกลม เป็นระบบที่ใช้บอกตำแหน่งของจุดในสเปซด้วยพิกัด ( r , θ , ϕ ) ในลักษณะดังรูป โดย r คือรัศมีของทรงกลม หรือเวกเตอร์บอกตำแหน่ง ของจุดนั้น

θ เป็นมุมในระนาบซึ่งตั้งฉากกับระนาบ xy และทำมุม ϕ ระนาบ xy โดยวัดจาก แกน x ไปยังแนว r

ϕ เป็นมุมในระนาบ xyโดยวัดจากแกน xไปยังเงาของ r บนระนาบ xy(หรือแนวρ)

**เวกเตอร์หน่วยในระบบพิกัดทรงกลม** ประกอบด้วย $\vec{a}_r$ , $\vec{a}_\theta$, $\vec{a}\phi$ ดังรูปโดยที่จุดใดๆ

$\vec{a}_r$ มีทิศชี้ตามทิศการเคลื่อนที่ของจุด P เมื่อ r เพิ่มขึ้น; $\theta, \phi$ คงที่(แนวเพิ่ม r)

$\vec{a}_\theta$ มีทิศชี้ตามทิศการเคลื่อนที่ของจุด P เมื่อ $\theta$ เพิ่มขึ้น; r, $\phi$ คงที่(แนวเพิ่ม$\theta$ )

$\vec{a}\phi$ มีทิศชี้ตามทิศการเคลื่อนที่ของจุด P เมื่อ $\phi$ เพิ่มขึ้น; r, $\theta$ คงที่(แนวเพิ่ม $\phi$)

จากรูปจึงพิจารณาได้ว่า$\vec{a}_r$ , $\vec{a}_\theta$, $\vec{a}\phi$ มีทิศทางต่างกันไปสำหรับแต่ละจุด(ไม่คงที่) แต่ ณ จุดหนึ่งๆ$\vec{a}_r$ , $\vec{a}_\theta$, $\vec{a}\phi$ มีทิศตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังนั้น

$\vec{a}_r . \vec{a}_r = \vec{a}_\theta . \vec{a}_\theta = \vec{a}\phi . \vec{a}\phi = 1$ $\qquad$ $\vec{a}_r . \vec{a}_\theta = \vec{a}_\theta . \vec{a}\phi = \vec{a}\phi . \vec{a}_r = 0$

และ $\vec{a}_r \,\mathrm{x}\, \vec{a}_r = \vec{a}_\theta \,\mathrm{x}\, \vec{a}_\theta = \vec{a}\phi \,\mathrm{x}\, \vec{a}\phi = 0$ $\qquad$ $\vec{a}_r \,\mathrm{x}\, \vec{a}_\theta = \vec{a}\phi$ ; $\vec{a}_\theta \,\mathrm{x}\, \vec{a}\phi = \vec{a}_r$ ; $\vec{a}\phi \,\mathrm{x}\, \vec{a}_r = \vec{a}_\theta$

**องค์ประกอบของเวกเตอร์และพีชคณิตของเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกลม**

เวกเตอร์ใดๆ ;$\vec{A}$ เขียนในรูปองค์ประกอบในระบบพิกัดทรงกลม ได้เป็น

$$\vec{A} = A_r\vec{a}_r + A_\theta\vec{a}_\theta + A_\phi\vec{a}_\phi \qquad \text{เมื่อ } A_r = \vec{A}.\vec{a}_r ,A_\theta = \vec{A}.\vec{a}_\theta ,A_\phi = \vec{A}.\vec{a}\phi$$

เป็นองค์ประกอบของ $\vec{A}$ ตามแนวเวกเตอร์หน่วย$\vec{a}_r$ ,$\vec{a}_\theta$ ,$\vec{a}\phi$ ตามลำดับ

และในทำนองเดียวกับระบบพิกัดทรงกระบอก จากการเขียนในเทอมองค์ประกอบจะแสดงได้ว่า

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_r \pm B_r)\vec{a}_r + (A_\theta \pm B_\theta)\vec{a}_\theta + (A_\phi \pm B_\phi)\vec{a}_\phi$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{a}_r & \vec{a}_\theta & \vec{a}_\phi \\ A_r & A_\theta & A_\phi \\ B_r & B_\theta & B_\phi \end{bmatrix}$$

$$= (A_\theta B_\phi - A_\phi B_\theta)\vec{a}_r + (A_\phi B_r - A_r B_\phi)\vec{a}_\theta + (A_r B_\theta - A_\theta B_r)\vec{a}\phi$$

$$m\vec{A} = (mAr)\vec{a}_r + (mA\theta)\vec{a}_\theta + (mA\phi)\vec{a}_\phi$$

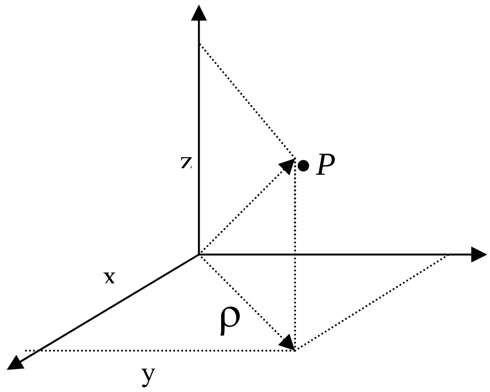
$$A = \sqrt{Ar^2 + A^2\theta + A^2\phi}$$

**ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกลมกับพิกัดฉากและพิกัดทรงกระบอก**

**ตัวแปร** x = $r$ SIN$\theta$COS$\phi$ $\qquad$ ; $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

y = $r$ SIN$\theta$SIN$\phi$ $\qquad$ ; $\theta = \mathrm{COS}^{-1}\left( Z \big/ \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \right)$

Z = $r$ COS$\theta$ $\qquad$ ; $\phi = \tan^{-1}\left( y \big/ x \right)$




และ $\rho = r\,\mathrm{SIN}\,\theta$ ; $r = \sqrt{p^2 + z^2}$

$\phi = \phi$ ; $\theta = \tan^{-1}(\rho/z)$

$z = r\,\mathrm{COS}\phi$ ; $\phi = \phi$

**เวกเตอร์หน่วย**

$$\vec{a}_x = \mathrm{SIN}\theta\mathrm{COS}\phi\,\vec{a}_r + \mathrm{COS}\theta\,\mathrm{COS}\phi\,\vec{a}_\theta - \mathrm{SIN}\phi\,\vec{a}\phi$$

$$\vec{a}_y = \mathrm{SIN}\theta\,\mathrm{SIN}\phi\,\vec{a}_r + \mathrm{COS}\theta\,\mathrm{SIN}\theta\,\vec{a}_\theta + \mathrm{COS}\phi\,\vec{a}\phi$$

$$\vec{a}_z = \mathrm{COS}\theta\,\vec{a}_r - \mathrm{SIN}\theta\,\vec{a}_\theta$$

$$\vec{a}_r = \mathrm{SIN}\theta\,\mathrm{COS}\phi\,\vec{a}_x + \mathrm{SIN}\theta\,\mathrm{SIN}\phi\,\vec{a}_y + \mathrm{COS}\theta\,\vec{a}_z$$

$$\vec{a}_\theta = \mathrm{COS}\theta\,\mathrm{COS}\phi\,\vec{a}_x + \mathrm{COS}\theta\,\mathrm{SIN}\phi\,\vec{a}_y - \mathrm{SIN}\theta\,\vec{a}_z$$

$\vec{a}\phi = -\,\mathrm{SIN}\phi\,\vec{a}_x + \mathrm{COS}\phi\,\vec{a}_y$ และ

$\vec{a}_p = \mathrm{SIN}\theta\,\vec{a}_r + \mathrm{COS}\theta\,\vec{a}_\theta$ ; $\vec{a}_r = \mathrm{SIN}\theta\,\vec{a}_p + \mathrm{COS}\theta\,\vec{a}_z$

$\vec{a}\phi = \vec{a}\phi$ ; $\vec{a}_\theta = \mathrm{COS}\theta\,\vec{a}_p - \mathrm{SIN}\theta\,\vec{a}_z$

$\vec{a}_z = \mathrm{COS}\theta\,\vec{a}_r - \mathrm{SIN}\theta\,\vec{a}_\theta$ ; $\vec{a}\phi = \vec{a}\phi$

**องค์ประกอบของเวกเตอร์**

$$Ax = \mathrm{SIN}\theta\,\mathrm{COS}\phi\,Ar + \mathrm{COS}\theta\,\mathrm{COS}\phi\,A\theta - \mathrm{SIN}\phi\,A\phi$$

$$Ay = \mathrm{SIN}\theta\,\mathrm{SIN}\phi\,Ar + \mathrm{COS}\theta\,\mathrm{SIN}\phi\,A\theta + \mathrm{COS}\phi\,A\phi$$

$$Az = \mathrm{COS}\theta\,Ar - \mathrm{SIN}\theta\,A\theta$$

$$Ar = \mathrm{SIN}\theta\,\mathrm{COS}\phi\,Ax + \mathrm{SIN}\theta\,\mathrm{SIN}\phi\,Ay + \mathrm{COS}\theta\,Az$$

$$A\theta = \mathrm{COS}\theta\,\mathrm{COS}\phi\,Ax + \mathrm{COS}\theta\,\mathrm{SIN}\phi\,Ay - \mathrm{SIN}\theta\,Az$$

$$A\phi = -\,\mathrm{SIN}\phi\,Ax + \mathrm{COS}\phi\,Ay$$

$A\rho = \mathrm{SIN}\theta\,Ar + \mathrm{COS}\theta\,A\theta$ ; $Ar = \mathrm{SIN}\theta\,A\rho + \mathrm{COS}\theta\,Az$

$A\phi = A\phi$ ; $A\theta = \mathrm{COS}\theta\,A\rho - \mathrm{SIN}\theta\,Az$

$Az = \mathrm{COS}\theta\,Ar - \mathrm{SIN}\theta\,A\theta$ ; $A\phi = A\phi$

การ Dot Product ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดทรงกลมกับพิกัดฉากสรุปได้ดังนี้

| | $\vec{a}_r$ | $\vec{a}_\theta$ | $\vec{a}\phi$ |
|---|---|---|---|
| $\vec{a}_x$ | SIN$\theta$ COS$\phi$ | COS$\theta$ COS$\phi$ | - SIN$\phi$ |
| $\vec{a}_y$ | SIN$\theta$ SIN$\phi$ | COS$\theta$ SIN$\phi$ | COS$\phi$ |
| $\vec{a}_z$ | COS$\theta$ | - SIN$\theta$ | O |

**ตัวอย่างที่1** กำหนดเวกเตอร์ $\vec{G} = \left(XZ\ /Y\right)\vec{a}_x$ ในระบบพิกัดฉากให้เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดทรงกลม

$$\text{จาก } G \ = \ Gr \ + \ G\theta \ + G\phi$$

$$Gr = \vec{G}\ .\vec{a}_r = \left(XZ\ /Y\right)\vec{a}_x\ .\vec{a}_r = \left(XZ\ /Y\right) \text{SIN}\theta\ \text{COS}\phi$$

$$= r\ \text{SIN}\theta\ \text{COS}\theta \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}$$

$$G\theta = \vec{G}\ .\vec{a}_\theta = \left(XZ\ /Y\right)\vec{a}_x\ .\vec{a}_\theta = \left(XZ\ /Y\right) \text{COS}\theta\ \text{COS}\phi$$

$$= \ r\ \cos^2\theta \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}$$

$$G\phi = \vec{G}\ .\vec{a}\phi = \left(XZ\ /Y\right)\vec{a}_x\ .\vec{a}\phi = \left(XZ\ /Y\right)(-\ \text{SIN}\phi)$$

$$G\phi = -r\ \text{COS}\theta\ \text{COS}\phi$$

$$\text{ดังนั้น}\vec{G}\ \text{ทรงกลม} = r\ \text{SIN}\theta\ \text{COS}\theta \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}\vec{a}_r + r\ \cos^2\theta \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}\vec{a}_\theta - r\ \text{COS}\theta\ \text{COS}\phi\vec{a}\phi$$

$$= r\ \text{COS}\theta\ \text{COS}\phi\left(\sin\theta\cot\phi\vec{a}_r + \cos\theta\cot\phi\vec{a}_\theta - \vec{a}_\phi\right) \qquad \textbf{ตอบ}$$

**ตัวอย่างที่2** จงหาเวกเตอร์ ซึ่งเริ่มจากจุด (4,25°,15°) ถึงจุด (7,120°,75°)

วิธีทำ แปลงจากพิกัดทรงกลมไปเป็นพิกัดฉาก

กำหนดจุด P(4,25°,15°) เป็น P(x1,y1,z1)

และ จุด Q(7,120°,75°) เป็น Q(x2,y2,z2)

ที่จุด P ; x1 = $r$ SIN$\theta$COS$\phi$ = 4 SIN 25° COS 15°

= 4(0.4226).(0.9659) = 1.633

y1 = $r$ SIN$\theta$ SIN$\phi$ = 4(0.4226).(0.2588) = 0.44

z1 = $r$ COS$\theta$ = 4(0.9063) = 3.62

ที่จุด Q ; x2 = 7 SIN 120° COS75° = 7(0.866).(0.2588) = 1.56

y2 = 7 SIN 120° SIN75° = 7(0.866).(0.9659) = 5.85

$z2 = 7COS120^{\circ} = 7(-0.5) = -3.5$

เวกเตอร์ระหว่างจุด P และ Q มีค่า $= (x2-x1)\,\vec{a}_x + (y2-y1)\,\vec{a}_y + (z2-z1)\,\vec{a}_z$

$= (1.56-1.633)\,\vec{a}_x + (5.85-0.44)\,\vec{a}_y + (-3.5-3.62)\,\vec{a}_z$

$= -0.07\vec{a}_x + 5.41\vec{a}_y - 7.12\vec{a}_z$ **ตอบ**

**ตัวอย่างที่ 3** จงแปลงจุดพิกัด P(2,-1,3) ให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก และทรงกลม

**วิธีทำ**

ทรงกระบอก $P(\rho,\phi, Z)$ ; $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{5}$

$\phi = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(-1/2) = 333.4^{\circ}$

$z = 3$

$\therefore\ P(2,-1,3) = P(\sqrt{5}, 333.4^{\circ}, 3)$ **ตอบ**

ทรงกลม $P(r, \theta, \phi)$ ; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{14}$

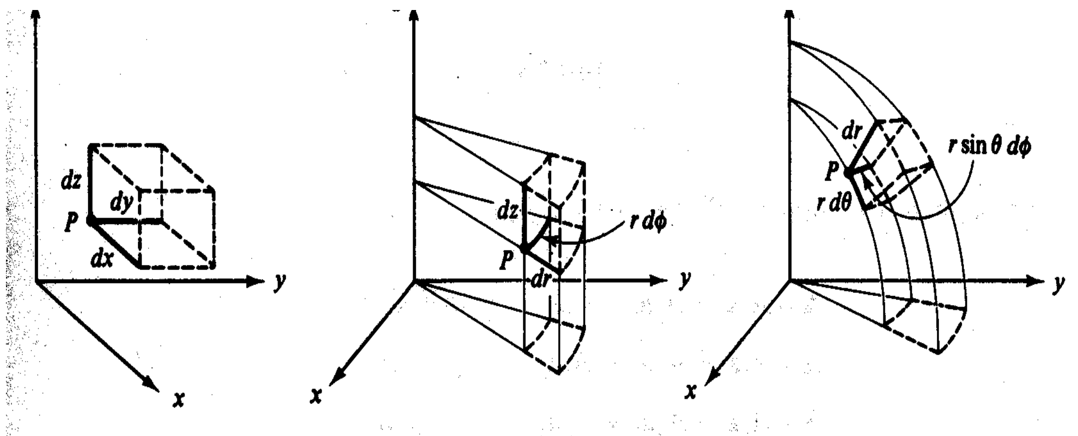
$\theta = COS^{-1}(Z/r) = COS^{-1}(3/\sqrt{14}) = 36.7^{\circ}$

$\phi = \tan^{-1}(y/x) = \tan^{-1}(-1/2) = 333.4^{\circ}$

$\therefore\ P(2,-1,3) = P(\sqrt{14}, 36.7^{\circ}, 333.4^{\circ})$ **ตอบ**

**อนุพันธ์ของปริมาตร พื้นผิว และเส้น**

เมื่อจุดพิกัด P ถูกขยายไปเป็น (x+dx ,y+dy,z+dz) หรือ (r+dr, $\phi$+d$\phi$,z+dz) หรือ (r+dr, $\theta$+d$\theta$,$\phi$+d$\phi$) อนุพันธ์ของปริมาตร dv ย่อมเกิดขึ้น สำหรับปริมาณจำกัดของผลต่างปริมาตรคือกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้งระบบพิกัดซึ่งค่า dv ในแต่ละระบบแสดงดังรูป




$dv = dx\,dy\,dz$ $dv = r\,dr\,d\phi\,dz$ $dv = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

จากรูปจะทราบขนาดพื้นที่ของแต่ละพื้นผิว ซึ่งแต่ละพื้นผิวจะกั้นอนุพันธ์เชิงปริมาตรใน ระบบพิกัดทรงกลมพื้นผิวที่จะตั้งฉาก กับ $\vec{a}_r$ คือ

$$dS = (r\,d\theta)(r\ \mathrm{SIN}\theta\,d\phi) = r^2\,\mathrm{SIN}\theta\,d\theta\,d\phi$$

ผลต่างเชิงเส้น dl คือเส้นทะแยงมุมที่ผ่านจุด P ดังนั้น

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$dl^2 = dr^2 + d\phi^2 + dz^2$$

$$dl^2 = dr^2 + d\theta^2 + d\phi^2$$

## แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1.3

1. จงหาระยะทางระหว่างจุด P(10,60$^\circ$,90$^\circ$) กับจุดต่อไปนี้
(ก) A(5, 60$^\circ$,90$^\circ$) (ข) (10,120$^\circ$,270$^\circ$) (ค) C(10, 60$^\circ$,270$^\circ$)

**คำตอบ** (ก) PA = 5 (ข) PB = 20 (ค) PC = 17.32

2. จงเขียนสนามอุณหภูมิ $T= 240+Z^2-2XY$ เป็นระบบพิกัดทรงกระบอก และทรงกลม

**คำตอบ** (2.1) $T = 240+Z^2 - \rho^2 \,\mathrm{SIN}2\phi$ (2.2) $T = 240+r^2 - r^2\mathrm{SIN}2\theta(1+\mathrm{SIN}2\phi)$

โดย COS A SIN A = (1/2) SIN2A

3. จงเขียนสนามเวกเตอร์ $\vec{w} = (x - y)\vec{a}_y$ เป็นระบบทรงกระบอกและทรงกลม

**คำตอบ** (3.1) $\vec{w} = \rho(\mathrm{COS}\phi\text{-}\mathrm{SIN}\phi)(\mathrm{SIN}\phi\,\vec{a}_p + \mathrm{COS}\phi\,\vec{a}_\theta)$

(3.2) $\vec{w} = r\ \mathrm{SIN}\theta(\mathrm{COS}\phi\text{-}\mathrm{SIN}\phi)(\mathrm{SIN}\theta\ \mathrm{SIN}\phi\,\vec{a}_r + \mathrm{COS}\theta\ \mathrm{SIN}\phi\,\vec{a}_\theta + \mathrm{COS}\phi\,\vec{a}\phi)$

4. จงหาความหนาแน่นที่จุด P(-2,-5,1) ถ้าความหนาแน่นมีค่าตามสมการ
(ก) $e^{-z^2}\left(2 + \rho^3 \cos^2\phi\right)$ (ข) $re^{-r/2}\left(5 + \cos\theta + \sin\theta\cos\phi\right)$

**คำตอบ (ก)** 8.66 (ข) 1.706

5. จงแปลง $A = y\vec{a}_x + x\vec{a}y + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{a}_z$ ให้เป็นระบบพิกัดทรงกระบอก

**คำตอบ** $A = 2r\sin\phi\cos\phi\vec{a}_r + \left(r\cos^2\phi - r\sin^2\phi\right)\vec{a}_\phi + r\cos^2\phi\vec{a}_z$

6.จงแปลงเวกเตอร์แต่ละตัวต่อไปนี้สู่ระบบพิกัดทรงกระบอกที่จุดที่กำหนดให้

(ก) $5\vec{a}_x$ ที่ P($\rho$=4,$\phi$=120$^\circ$,Z=2) (ข) $5\vec{a}_x$ ที่Q(X=3,Y=4,Z= -1)

(ค) $4\vec{a}_x - 2\vec{a}_y - 4\vec{a}_z$ ที่ A(X=2,Y=3,Z=5)

**คำตอบ** $-2.50\vec{a}_\rho - 4.33\vec{a}\phi; 3\vec{a}_\rho - 4\vec{a}_\phi; -0.555\vec{a}_\rho - 4.44\vec{a}_\phi - 4\vec{a}_z$

**7.** กำหนดจุด A(X=2,Y=3,Z= -1) และ B($r$ =4, $\theta$=25$^\circ$,$\phi$=120$^\circ$) จงหา
(ก) ค่าระบบพิกัดทรงกลม ของA (ข) ค่าระบบพิกัดฉากของB (ค)ระยะทางจาก A ถึง B

**คำตอบ** $r$ =3.74, $\theta$=105.5$^\circ$, $\phi$=56.3$^\circ$;X=-0.845,Y=1.464,Z=3.63;5.64