หน่วยที่ 2 สนามไฟฟ้าสถิตย์

บทที่ 2.1 กฎของคูลอมป์และความเข้มสนามไฟฟ้า

2.1.1 กฎของคูลอมป์

ภายหลังการพบอำนาจพิเศษที่เกิดจากประจุไฟฟ้าโดย Thaler และการศึกษาที่มีการต่อเนื่องกันมาทำให้เราเข้าใจสมบัติของประจุไฟฟ้าหลายประการ แต่ก็ไม่ทราบว่าโครงสร้างของประจุไฟฟ้าเป็นอย่างไร อิเล็กตรอนและโปรตรอนไม่อาจใช้เป็นพื้นฐาน ความคิดเกี่ยวกับโครงสร้างของประจุไฟฟ้าได้ เพราะมีประจุไฟฟ้าอยู่ในตัวแล้ว ประจุไฟฟ้าจึงถูกเรียกเป็น “ปริมาณมูลฐาน” อย่างหนึ่ง ร่วมกับมวล ความยาว เวลา ในการกำหนดปริมาณทางไฟฟ้าอื่นๆ ขึ้นมา

หลังจากที่ ดร.Gilbertได้ทำการทดลองพบว่า ปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นระหว่างประจุไฟฟ้ามีทั้งแรงดึงดูด และแรงผลัก Coulomb ก็ได้ทำการทดลองวัดแรงระหว่างวัตถุที่มีประจุไฟฟ้า โดยใช้เครื่องวัดแรงบิด ที่เขาประดิษฐ์ขึ้นเอง ในเวลาต่อมา และสรุปว่า “แรงระหว่างวัตถุเล็กๆ (ที่มีประจุไฟฟ้า) สองอัน ซึ่งวางอยู่ในสูญญากาศหรืออวกาศ(Free sped) ห่างกันเป็นระยะทางยาวมาก เมื่อเทียบกับขนาดของวัตถุ มีขนาดแปรผันโดยตรงกับปริมาณประจุบนแต่ละวัตถุ และแปรผกผันกับกำลังสองของระยะห่างระหว่างวัตถุทั้งสอง” นั่นคือ

ถ้าจุดประจุไฟฟ้า Q_1 , Q_2 วางห่างกันเป็นระยะทาง R ในสูญญากาศแล้วแรงทางไฟฟ้า; $F \propto Q_1, Q_2$ และ $F \propto \frac{1}{R^2}$ ดังนั้น

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{R^2}$$:กฎของคูลอมป์

โดย $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ = 9×10^9 Nm^2/C^2

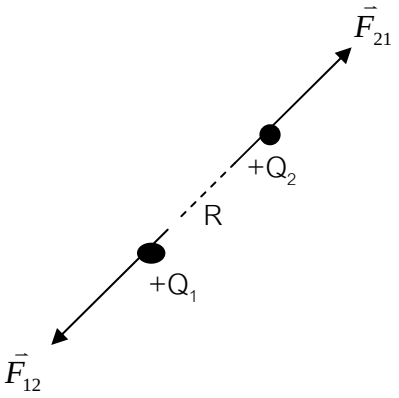
และ $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ C^2/Nm^2 หรือ F/m

ข้อสังเกตเกี่ยวกับแรงทางไฟฟ้าตามกฎของคูลอมป์

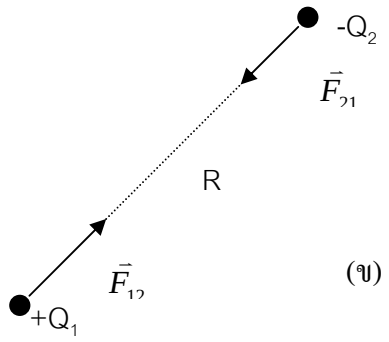
1) แรงทางไฟฟ้าจะเป็นไปตามกฎของคูลอมป์สำหรับวัตถุมีประจุซึ่งมีขนาดเล็กๆ หรือจุดประจุไฟฟ้าเท่านั้น

2) แรงดันไฟฟ้าระหว่างจุดปรุจุคู่หนึ่งๆ จะอยู่ในแนวเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างจุดประจุคู่นั้นๆ

3) แรงทางไฟฟ้าระหว่างจุดประจุคู่หนึ่งๆ เป็น “แรงต่างร่วม” คือจุดปรุจุทั้งสองจะส่งแรงกระทำต่อกันด้วยแรงขนาดเท่ากัน และทิศทางตรงข้ามกันเสมอดังรูป



(ก)



(ข)

จากรูป (ก) $\vec{F}_{12} = \frac{kQ_1Q_2}{R_{21}^2} \cdot \vec{a}_{R21}$; $\vec{a}_{R21} = \frac{\vec{R}_{21}}{R_{21}}$

และ $\vec{F}_{21} = \frac{kQ_1Q_2}{R_{12}^2} \cdot \vec{a}_{R12}$; $\vec{a}_{R12} = \frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}}$

จากรูปที่ (ข) $\vec{F}_{12} = \frac{kQ_1(-Q_2)}{R_{21}^2} \bullet \vec{a}_{R21} = \frac{kQ_1Q_2}{R_{21}^2} \bullet (-\vec{a}_{R12})$

และ $\vec{F}_{21} = \frac{kQ_1(-Q_2)}{R_{12}^2} \bullet \vec{a}_{R12} = \frac{kQ_1Q_2}{R_{12}^2} \bullet (-\vec{a}_{R12})$

จากทั้งสองกรณีจะพบว่า $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{21}$ เนื่องจาก $\vec{a}_{R12} = -\vec{a}_{R12}$

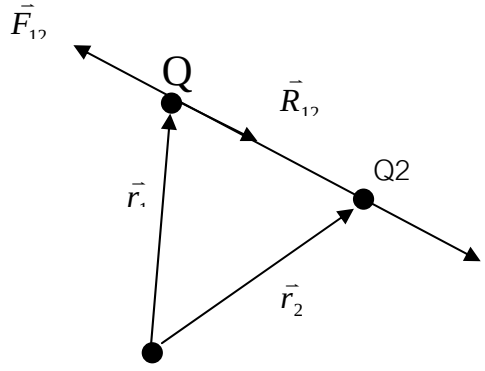
กฎของคูลอมป์จึงเป็นกฎเชิงเส้นซึ่งหมายความว่า

(1) เมื่อเพิ่มปริมาณประจุ Q_1 ขึ้น n เท่าของคาเดิม แรงที่กระทำต่อประจุ Q_2 ก็จะเพิ่มเป็น n เท่าของแรงกระทำเดิม ถ้าระยะห่างเท่าเดิม

(2) แรงกระทำต่อจุดประจุหนึ่ง เนื่องจากจุดประจุอื่นๆ จะเป็นผลบวกแบบเวกเตอร์ของแรงจากแต่ละจุดประจุ ($\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + ...$)

การหาค่า r_1, r_2 และ $\vec{a}_R$

ถ้าประจุชนิดจุด Q_1 และ Q_2 อยู่ ณ จุดที่มีเวคเตอร์ ตำแหน่ง r_1 และ r_2 การหาค่าแรงเวคเตอร์ F_{12} ที่กระทำต่อ Q_2 ซึ่งเกิดจาก Q_1 ดังนี้



$$\vec{F}_{12} = \frac{KQ_1Q_2}{R_{12}^2} \bullet \vec{a}_{R12}$$

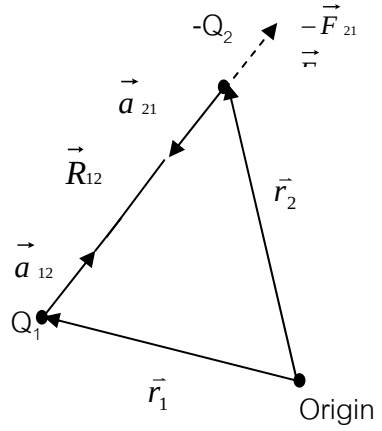
เมื่อ $\vec{R}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$R_{12} = \left|\vec{R}_{12}\right| = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|$

$\vec{a}_{R12} = \frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}}$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ประจุจุดค่า 3 x 10^{-4}C อยู่ที่ตำแหน่ง P(1,2,3) และประจุจุดอีกตัวค่า -10^{-4}C อยู่ที่ตำแหน่ง Q (2,0,5) ในสูญญากาศจงหาแรงที่กระทำต่อประจุตัวที่ 2

<u>วิธีทำ</u>



$$\vec{F}_{21} = \frac{kQ_1Q_2}{R_{12}^2} \bullet (-\vec{a}_{R12})$$

$$Q = 3\times10^{-4}, Q_2 = -10^{-4}$$

$$\vec{R}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (2-1)\vec{ax} + (0-2)\vec{ay} + (5-3)\vec{az}$$
$$= \vec{ax} - 2\vec{ay} + 2\vec{az}$$

$$\vec{a}_{R12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|} = \frac{\vec{ax} - 2\vec{ay} + 2\vec{az}}{3}$$

$$\therefore \vec{F}_{21} = \frac{(3\times10^{-4})(-10^{-4})}{4\pi(1/36\pi)10^{-9}\times9}\left(\frac{\vec{ax} - 2\vec{ay} + 2\vec{az}}{3}\right)$$
$$= -30\left(\frac{\vec{ax} - 2\vec{ay} + 2\vec{az}}{3}\right)$$

$$\vec{F}_{21} = -10\vec{ax} + 20\vec{ay} - 20\vec{az} \quad N$$

<u>ตัวอย่างที่2</u> ประจุชนิดจุด 2 ตัวดังนี้ Q_1 = 2 mC อยู่ที่ตำแหน่ง P_1(-3,7,-4) และ Q_2 = -5 mC อยู่ที่ตำแหน่ง P_2(2,4,-1) หาแรงเวกเตอร์บน (ก) Q_2 (ข) Q_1

<u>วิธีทำ</u> Q_1=2mC ; Q_2=-5mC รูปร่างเวกเตอร์คล้ายกับตัวอย่างที่ 1

(ก) แรงเวกเตอร์ที่บนประจุ Q_2 คือ $\vec{F}_{21} = \frac{KQ_1Q_2}{R_{12}^2} \bullet \vec{a}_{R12}$

$$\vec{R}_{12} = \vec{R}\left|P_2 - P_1\right| = (2+3)\vec{ax} + (4-7)\vec{ay} + (-1+4)\vec{az}$$
$$= 5\vec{ax} - 3\vec{ay} + 3\vec{az}$$

$$R_{12} = \left|\vec{R}_{12}\right| = \sqrt{25+9+9} = 6.55$$

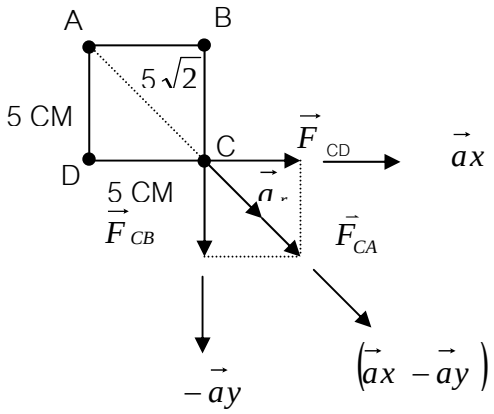
$$\vec{a}_{R12} = \frac{\vec{R}_{12}}{\left|\vec{R}_{12}\right|} = \frac{5\vec{ax} - 3\vec{ay} + 3\vec{az}}{6.55}$$

$$\therefore \vec{F}_{21} = \frac{(2\times10^{-3})(-5\times10^{-3})}{4\pi(1/36\pi)10^{-9}\times(6.55)^2} \bullet \left(\frac{\left(5\vec{ax} - 3\vec{ay} + 3\vec{az}\right)}{6.55}\right)$$
$$= -1.594\vec{ax} + 0.956\vec{ay} - 0.956\vec{az} \quad kN$$

(ข) แรงเวกเตอร์ที่กระทำบน F_{12}มีค่าเท่ากับ$\vec{F}_{21}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้าม

$$\therefore \vec{F}_{12} = 1.594\vec{ax} - 0.956\vec{ay} + 0.956\vec{az} \quad kN$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จุดประจุ 3 μC 4 จุด วางอยู่ที่มุมของสี่เหลี่ยมจัตตุรัสความยาวด้านละ 5 Cm ใน Free space จงหาแรงทางไฟฟ้าบนจุดประจุที่วาอยู่ที่มุม C



$$\therefore \quad \vec{F}_{CB} = \frac{KQ_C Q_B}{R^2_{BC}} \cdot \vec{a}_{RBC}$$

$$= \frac{9\times10^9 \times \left(3\times10^{-6}\right)^2}{\left(5\times10^{-2}\right)^2} \cdot \left(-\vec{a}_y\right) \ldots\ldots N$$

$$= -32.40\vec{a}_y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots N$$

$$\vec{F}_{CA} = \frac{\left(9\times10^9\right)\times\left(3\times10^{-6}\right)^2}{\left(5\sqrt{2}\times10^{-2}\right)^2} \cdot \frac{\left(\vec{a}_x - \vec{a}_y\right)}{\sqrt{2}}$$

$$= 11.45\vec{a}_x - 11.45\vec{a}_y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots N$$

และ $$\vec{F}_{CD} = \frac{9\times10^9 \times \left(3\times10^{-6}\right)^2}{\left(5\times10^{-2}\right)^2} \cdot \vec{a}_x$$

$$= 32.40\vec{a}_x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots N$$

$$\therefore \vec{F}_C = \left(32.40 + 11.45\right)\vec{a}x - \left(32.40 + 11.45\right)\vec{a}y$$

$$= 43.85\left(\vec{a}x - \vec{a}y\right)$$

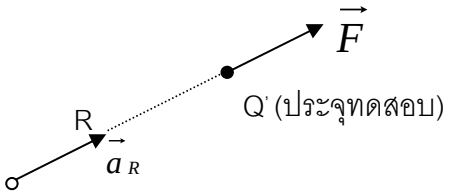
$$\left|\vec{F}_C\right| = 43.85\sqrt{2} \qquad N = 62.01 \qquad N$$

ดังนั้นแรงบนแต่ละประจุ = 62.01 N **ตอบ**

2.1.2 ความเข้มสนามไฟฟ้า

นิยาม : ความเข้มสนามไฟฟ้า ณ จุดใดในสนามไฟฟ้า (บริเวณที่แรงไฟฟ้าจากต้นกำเนิดสนามไฟฟ้าส่งไปถึงกัน) หมายถึง แรงไฟฟ้าต่อหนึ่งหน่วยประจุ ซึ่งกระทำต่อประจุทดสอบที่วางอยู่ ณ จุดนั้น

หรือ $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q'}$ ..... (N/C ; V/m) เมื่อ Q' = ปริมาณประจุทดสอบ เป็นบวกขนาด 1 หน่วย หรือปริมาณประจุน้อยมาก เมื่อเทียบกับประจุเจ้าของสนาม



Q (เจ้าของสนาม)

จากกฎของคูลอมป์ $\vec{F} = \frac{KQQ'}{R^2} \bullet \vec{a}_R$ และเนื่องจาก $\vec{E} = \frac{\vec{E}}{Q'}$ ดังนั้นความเข้มสนามไฟฟ้า ณ ระยะห่าง R จากจุดประจุ Q มีค่าเป็น

$\vec{E} = \frac{KQ}{R^2} \bullet \vec{a}_r$; $\vec{a}_R$ เป็นเวกเตอร์หน่วยทิศจากประจุเจ้าของสนามไปยังประจุทดสอบ

ซึ่งจะเห็นว่าเป็นฟังก์ชั่นของ Q และระยะจาก Q ถึงตำแหน่งที่ต้องการหาความเข้มสนามไฟฟ้าเท่านั้น และถ้าจุดประจุ Q นี้ วางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของระยะพิกัดทรงกลม เราจะได้สมการของความเข้มสนามไฟฟ้าเป็น

$\vec{E} = \frac{KQ}{R^2} \bullet \vec{a}_r$ หรือ $\vec{E}_r = \frac{KQ}{r^2}$

ซึ่งเขียนในระบบพิกัดฉากได้เป็น

$$\vec{E} = \frac{KQ}{R^2} \bullet \frac{\left(X\vec{a}z + Y\vec{a}y + Z\vec{a}z\right)}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{KQ}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}\left[\frac{X}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bullet \vec{a}x + \frac{Y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bullet \vec{a}y + \frac{Z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \bullet \vec{a}z\right]$$

$$Ex = \frac{KQx}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \quad ; \quad Ey = \frac{KQy}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \quad ; \quad Ez = \frac{KQz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

จะเห็นว่าสมการของความเข้มสนามไฟฟ้าจากจุดประจุในกรณีนี้เมื่อเขียนในระบบพกัดฉากที่เป็นที่เคยชินกันมากที่สุด กลับยุ่งยากกว่าระบบพิกัดทรงกลมมาก ซ้ำยังแปลความหมายได้ยากกว่าด้วย นอกจากนี้ ถ้าจุดประจุ Q ไม่ได้อยู่ที่จุดศูนย์กลาง สมการในระบบพิกัดฉากจะยิ่งยุ่งยากมากขึ้น การเลือกใช้ระบบพิกัดให้เหมาะสมจึงเป็นสิ่งจำเป็น

การหาแรงเวกเตอร์ $\vec{F}$ ที่เกิดจากประจุชนิดจุดมากกว่า 2 ประจุทำให้ได้โดยใช้หลักการวางซ้อน (Prineiple of superposition) หลักการนี้กล่าวว่า ถ้ามีประจุ N ประจุ ($Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$) อยู่ ณ จุดที่มีเวกเตอร์ตำแหน่ง $r_1, r_2, \ldots, r_N$ ตามลำดับ แรง F ซึ่งกระทำต่อประจุ Q ที่จุด r เป็นผลรวมทางเวกเตอร์ของแรงที่กระทำต่อ Q แต่ละตัวคือ

$$E = \frac{KQQ_1(r - r_1)}{|r - r_1|^3} + \frac{KQQ_2(r - r_2)}{|r - r_2|^3} + \ldots + \frac{KQQ_2(r - r_n)}{|r - r_n|^3}$$

หรือ $$E = KQ\sum_{i=1}^{N} \frac{Qi(r - ri)}{|r - ri|^3}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> ประจุชนิดจุด 1 mC และ –2mC อยู่ที่ P(3,2,-1) และQ (-1,-1,4)ตามลำดับ จงหาแรงทางไฟฟ้ากระทำต่อประจุ 10nC อยู่ที่ (0,3,1) และหาความเข้มของสนามไฟฟ้าที่ (0,3,1)

<u>วิธีทำ</u>

$$\vec{F} = \sum_{k=1,2} \frac{QQ_k}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{a}_R = \sum_{k=1,2} \frac{QQ_k(r - r_k)}{4\pi\varepsilon_0 |r - r_k|^3}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{10^{-3}[(0,3,1) - (3,2-1)]}{|(0,3,1) - (3,2,-1)|^3} - \frac{2\bullet 10^{-3}[(0,3,1) - (-1,-1,4)]}{|(0,3,1) - (-1,-1,4)|^3}\right\}$$

$$= \frac{10^{-3}\bullet 10\bullet 10^{-9}}{4\pi\bullet\frac{10^{-9}}{36\pi}}\left[\frac{(-3,1,2)}{(9+1+4)^{3/2}} - \frac{2(1,4,-3)}{(1+16+9)^{3/2}}\right]$$

$$= 9\bullet 10^{-2}\left[\frac{(-3,1,2)}{14\sqrt{14}} + \frac{(-2,-8,6)}{26\sqrt{26}}\right] = -6.507\vec{a}x - 3.81\vec{a}y + 7.506\vec{a}z \qquad mN$$

ที่จุด $(0,3,1); \vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} = \sum_{k=1,2} \frac{QQ_k(r - r_k)}{4\pi\varepsilon_0 |r - r_k|^3} = -6.507\vec{a}x - 3.81\vec{a}y + 7.506\vec{a}z \bullet \frac{10^{-3}}{10\bullet 10^{-9}}$

$$\vec{E} = -650.7\vec{a}x - 381.7\vec{a}y + 750.6\vec{a}z \qquad kV/m \ldots\ldots\ldots\ldots \mu Í^o$$

<u>แบบฝึกหัดท้ายบท</u>

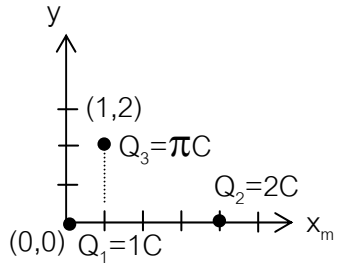
1. จุดประจุ Q_1=50 μC และ Q_2=10μC อยู่ที่ (-1,1,-3)m ตามลำดับ จงหาแรงไฟฟ้าบนประจุ Q_2

คำตอบ $0.144\vec{a}x + 0.108\vec{a}z \quad N$

2. ถ้าจุดประจุ Q_1=300μC ซึ่งอยู่ที่ (1,-1,-3)m ได้รับแรงกระทำจากจุดประ Q_2 ซึ่งอยู่ที่ (3,-3,-2)m เป็น $\vec{F}_{12} = 8\vec{a}x - 8\vec{a}y + 4\vec{a}z \quad (N)$ จงหาค่าจุดประจุ Q_2

คำตอบ -40μC

3. จุดประจุ Q_1 Q_2 Q_3 มีค่าประจุและวางอยู่ในตำแหน่งต่างๆ ดังรูป แรงลัพธ์ $(\vec{F})$ที่เกิดขึ้นบน Q_3จะมีค่าเท่าใด



คำตอบ $\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = \left[\left(\frac{9}{5\sqrt{5}} - \frac{54}{13\sqrt{13}}\right)\vec{a}x + \left(\frac{18}{5\sqrt{5}} + \frac{36}{13\sqrt{13}}\right)\vec{a}y\right](\pi \times 10^9)..N$

4. ประจุไฟฟ้า Q=7x10^{-9}C วางอยู่ในอวกาศที่จุด (-0.2,-0.3,0.6)จงคำนวณหาความเข้มสนามไฟฟ้า ณ จุด P(0.4,0.6,-1.2)

คำตอบ $\vec{E} = 4.08\vec{a}x + 6.17\vec{a}y - 12.24\vec{a}z \quad V/m$

5. จงหาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด P(-4,6,-5) ใน Free space เนื่องจากจุดประจุ 0.1mc ณ จุด

(ก) Origin (ข) (2,-1,-3)

คำตอบ (ก) $-5.33\vec{a}x + 7.99\vec{a}y - 6.66\vec{a}z \quad V/m$

(ข) $-6.43\vec{a}x + 7.56\vec{a}y - 2.14\vec{a}z \quad V/m$