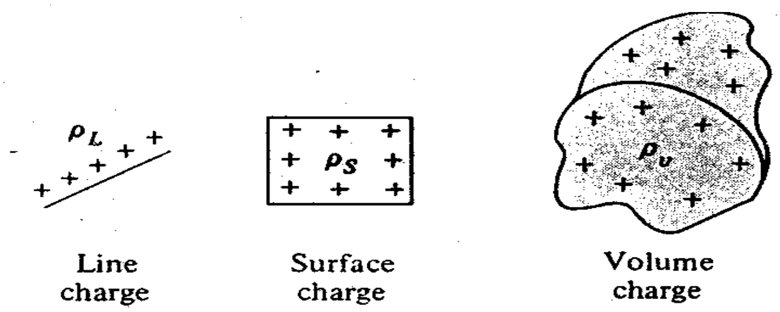
บทที่ 2.2 สนามไฟฟ้าที่เกิดจากการกระจายของประจุแบบต่อเนื่อง

2.2.1 บทนำ หลังจากที่เราได้ศึกษาแรงและสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุชนิดจุด (Piont Charge) ในสูญญากาศแล้ว ลำดับต่อไปเราจะพิจารณา การกระจายอย่างต่อเนื่อง ตามเส้น (LINE) , บนพื้นผิว (Surface) หรือในปริมาตร (Volume) ดังรูป



ความหนาแน่นของประจุเชิงเส้น(Line Chaege Density), ความหนาแน่นของประจุเชิงผิว (Surface Charge Density), ความหนาแน่นของประจุเชิงปริมาตร (Volume Charge Density)เราแทนด้วย ρL(C/m),ρS (C/m^2), และ ρV(C/m^3) ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาความเข้มของสนามไฟฟ้าที่เกิดจากการกระจายของประจุแต่ละชนิด ρL(C/m),ρS (C/m^2), และ ρV(C/m^3) เป็นผลรวมของสนามไฟฟ้าที่ประกอบขึ้นด้วยประจุชนิดจุดเป็นจำนวนมาก ซึ่งทำให้เกิดการกระจายประจุอย่างต่อเนื่อง เมื่อแทน Q ในสมการ

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}.\vec{a}_R$$

ด้วยส่วนย่อยของประจุ $\rho_L dl$, $\rho_S ds$, หรือ $\rho_V dv$ จะได้

$$\vec{E} = \int \frac{\rho_L dl}{4\pi\varepsilon_o R^2} \cdot \vec{a}_R \qquad ……………..(1)$$

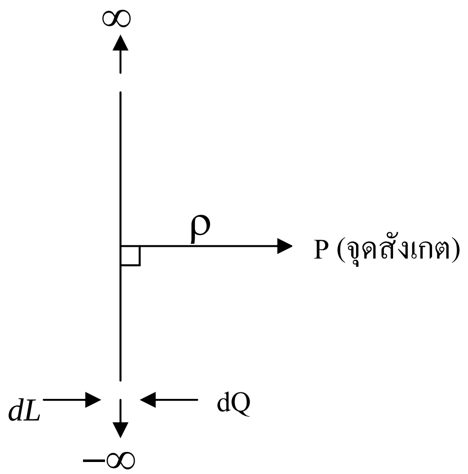
$$\vec{E} = \int \frac{\rho_S ds}{4\pi\varepsilon_o R^2} \cdot \vec{a}_R \qquad ………………(2)$$

$$\vec{E} = \int \frac{\rho_V dv}{4\pi\varepsilon_o R^2} \cdot \vec{a}_R \qquad ………………(3)$$

ต่อไปเราจะใช้สมการที่ (1) ถึง (3) หาความเข้มสนามไฟฟ้าในการกระจายของประจุเชิงเส้น,ประจุเชิงพื้นผิว,ประจุเชิงปริมาตร ตามลำดับ

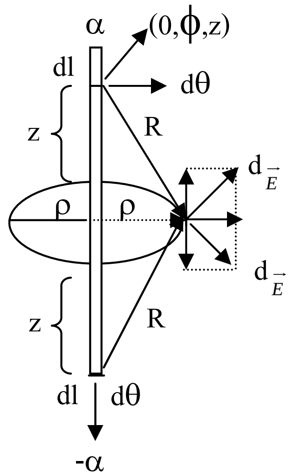
2.2.2 ประจุเชิงเส้น (Line Charge)

การหาความเข้มสนามไฟฟ้า ที่จุด P ใดๆ ซึ่งอยู่ห่างเป็นระยะ ρ จากประจุที่กระจายอย่างสม่ำเสมอเป็นเส้นตรงที่ยาวมาก โดยความหนาแน่นประจุเป็น ρL ต่อหน่วยความยาว



ส่วนย่อยของประจุ (dQ) มีความสัมพันธ์กับส่วนย่อยของเส้น (dl = dz) ดังนี้

$$dQ = \rho_L dL = \rho_L dz$$



เลือกใช้ระบบพิกัดทรงกระบอกโดยให้เส้นประจุ(Line Charge) วางตัวตามแนวแกน z

จากสมการ (1) $$\vec{E} = \int \frac{\rho_L dl}{4\pi\varepsilon o R^2} \cdot \vec{a}_R \;;\; k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}$$

จากรูป $$d\vec{E} = \frac{kQ}{R^2}\cdot\vec{a}_R = \frac{kQ}{R^3}\cdot\vec{R}$$

$$\therefore \quad d\vec{E} = \frac{kdQ\left(\rho\vec{a}_\rho + z\vec{a}_z\right)}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

จากการพิจารณา สมมาตรพบว่าองค์ประกอบของ $d\vec{E}$ ในแนว $\vec{a}_z$ จะหักล้างกันหมดไป แต่แนว $\vec{a}_R$ จะเสริมกัน $\therefore \vec{E}_P = \int d\vec{E} = k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_L dz\left(\rho\vec{a}_\rho\right)}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$; $dQ = \rho l dz$

$$= k\rho_L\rho\vec{a}_\rho\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}$$

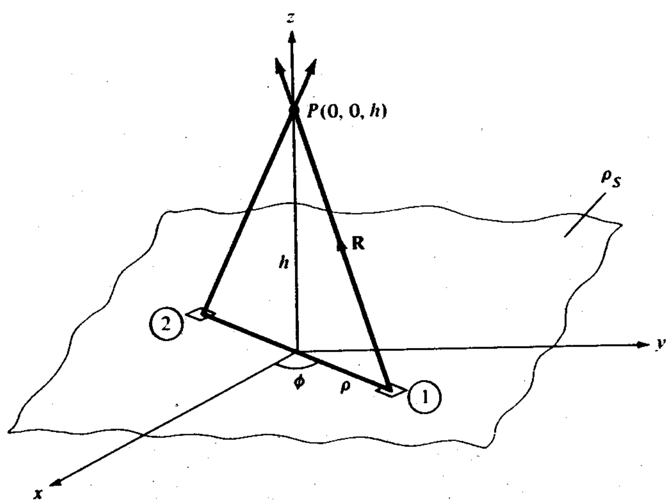
$$= \frac{\rho_L\vec{a}_\rho\rho}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{z}{\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_L\vec{a}_\rho}{4\pi\varepsilon_o\rho}\left[\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$\vec{E}_P = \frac{\rho_L\vec{a}_\rho}{4\pi\varepsilon_o\rho}\cdot\left[\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_L\vec{a}_\rho}{4\pi\varepsilon_o\rho}(2) = \frac{\rho_L\vec{a}_\rho}{2\pi\varepsilon_o\rho}$$

$$\therefore \quad \vec{E}_P = \frac{\rho_L\vec{a}_\rho}{2\pi\varepsilon_o\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)******$$

2.2.3 ประจุเชิงพื้นผิว (Surface Charge)

พิจารณาแผ่นอนันต์ของประจุในระนาบ xy ที่มีความหนาแน่นประจุคงที่ ρs ดังรูป



ส่วนย่อยของประจุ dQ มีความสัมพันธ์ กับพื้นที่ย่อย dS ดังนี้

$$dQ = \rho_S\, dS$$

ประจุทั้งหมดมีค่า $Q = \int \rho_S\, dS$

จากสมการที่(2) ความเข้มของสนามไฟฟ้า E ที่จุด P(0,0,h) ที่เกิดจากพื้นที่ย่อย 1 ในรูปจะเป็น

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_o R^2}\cdot \vec{a}_R \qquad \text{.........................(5)}$$

จากรูป $\vec{R} = \rho\left(-\vec{a}_\rho\right) + h\vec{a}_z \quad , R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{\rho^2 + h^2}$

$$\vec{a}_R = \frac{R}{\left|\vec{R}\right|} \quad , dQ = \rho_S\, dS = \rho_S\, \rho d\phi d\rho$$

แทนค่าเทอมต่างๆเหล่านี้ลงในสมการ(5);

$$d\vec{E} = \frac{\rho_S\, \rho d\phi d\rho\left[-\rho\vec{a}_\rho + h\vec{a}_z\right]}{4\pi\varepsilon_o\left[\rho^2 + h^2\right]^{3/2}} \qquad \text{.............(6)}$$

พิจารณาการกระจายของประจุบนแผ่นอนันต์มีลักษณะสมมาตร พื้นที่ย่อย 1 จะมีพื้นที่ย่อยที่เหมือนกันอยู่ด้านตรงกันข้าม(พื้นที่ย่อย2) ซึ่งมีค่า $d\vec{E}_\rho$ เท่ากันแต่ทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้น การเกิด $\vec{E}$ ในทิศทาง $\vec{a}_\rho$ หรือ E_ρ จึงหักล้างซึ่งกันและกัน เป็นศูนย์ แสดงว่า $\vec{E}$ จะมีเฉพาะองค์ประกอบ Z เท่านั้น ดังนั้น

$$\vec{E} = \int d\vec{E}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\infty}\frac{h\rho d\rho d\phi}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2}}\bullet \vec{a}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_S h}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\infty}\frac{\rho d\rho d\phi}{\left[\rho^2 + h^2\right]^{3/2}}\bullet \vec{a}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_S h}{4\pi\varepsilon_o}\cdot(2\pi)\int_{\rho=0}^{\infty}\frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + h^2\right)^{3/2}}\bullet \vec{a}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_S h}{2\varepsilon_o}\int_0^{\infty}\left[\rho^2 + h^2\right]^{-3/2}\cdot\frac{1}{2}d\left(\rho^2\right)\bullet \vec{a}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_S h}{2\varepsilon_o}\left\{-\left[\rho^2 + h^2\right]^{-1/2}\Big|_0^{\infty}\right\}\bullet \vec{a}_z$$

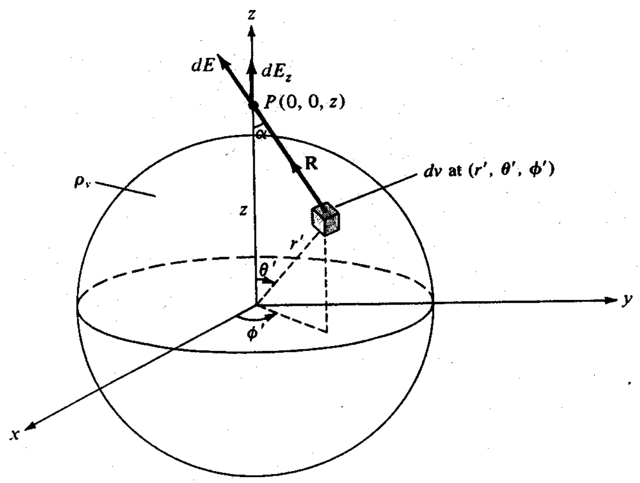
$$\vec{E} = \frac{\rho_S h}{2\varepsilon_o}\left[\frac{-1}{\sqrt{\infty^2 + h^2}} + \frac{1}{\sqrt{h^2}}\right]\bullet \vec{a}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_S h}{2\varepsilon_o}\left[0 + \frac{1}{h^2}\right]\bullet \vec{a}_z$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o}\bullet \vec{a}_z \qquad \text{............... (7)*****}$$

สูตรทั่วไป $\vec{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o} \cdot \vec{a}_n$; $\vec{a}_n$ เป็น Unit Vector ที่ตั้งฉากกับแผ่น ρs

2.2.4 ประจุเชิงปริมาตร (Volume Charge)



ส่วนย่อยของประจุ dQ มีความสัมพันธ์กับปริมาตร ย่อย dv ดังนี้

$$dQ = \rho_V dv \qquad \text{.............(8)}$$

ประจุทั้งหมดภายในทรงกลมที่มีรัศมี a ; $Q = \int \rho_V dv = \rho_V \int dv = \rho_V \frac{4\pi a^3}{3}$ ....(9)

ส่วนย่อยความเข้มสนามไฟฟ้า dE ที่ P(0,0,z) ซึ่งเกิดจากประจุเชิงปริมาตรย่อย มีค่าเป็น

$$dE = \frac{\rho_V dv}{4\pi\varepsilon_o R^2} \bullet \vec{a}_R \qquad \text{................(10)}$$

เนื่องจากการกระจายของประจุมีลักษณะสมมาตร ค่า Ex หรือ Ey จึงหักล้างกันหมดทำให้เหลือเพียง $\vec{a}_z$ เท่านั้น

$$\therefore\ \vec{E}_z = E \cdot \vec{a}_z = \int dE \cos\alpha = \frac{\rho_V}{4\pi\varepsilon_o} \int dv \ \frac{\cos\alpha}{R^2} \qquad \text{.........(11)}$$

เขียนสมการ dv , R^2, และ COSα ดังนั้น

$$dv = r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\varphi' \qquad \text{..............(12)}$$

ใช้กฎของ COSINE พิจารณารูป

$$R^2 = z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta'$$

$$r'^2 = z^2 + R^2 - 2zR \cos\alpha$$

แทนค่า

$$\cos\alpha = \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR}$$

$$\cos\theta' = \frac{z^2 + r'^2 - R^2}{2zr'}$$

แทนค่าลงในสมการ(11) ทำการอินทิเกรท จะได้ $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\cdot\vec{a}_r$ …………(13)

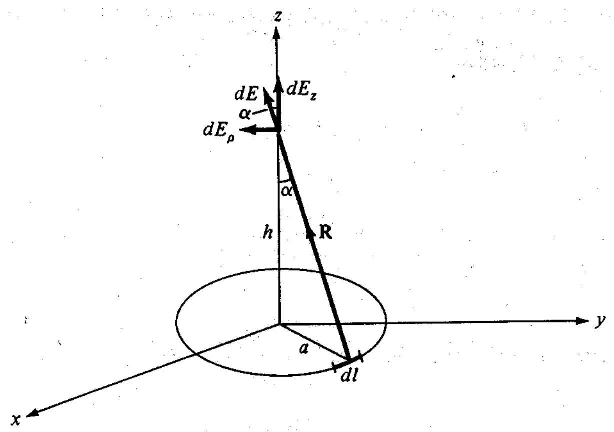
ผลลัพธ์นี้เป็นค่า $\vec{E}$ ที่ P(0,0,z)

ในกรณีการกระจายของประจุมีลักษณะสมมาตรหาความเข้มของสนามไฟฟ้าที่ P(r,θ,ϕ) ได้จากสมการ(13) ดังนี้

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\cdot\vec{a}_z \quad \text{……………..(14)}$$

ความเข้มสนามไฟฟ้าในสมการที่ (14) นี้เหมือนกับความเข้มของสนามไฟฟ้าประจุชนิดจุด Q ซึ่งอยู่ ณ จุด Origin หรือศูนย์กลางของการกระจายประจุแบบทรงกลม

ตัวอย่างที่ 1 วงแหวนมีรัศมี a มีประจุคงที่ ρ_L C/m และวางตัวอยู่บนระนาบ xy ดังรูป จงแสดงว่า E(0,0,h) $= \dfrac{\rho_L a h}{2\varepsilon_o\left[h^2 + a^2\right]^{3/2}}\cdot\vec{a}_z$



วิธีทำ วิธีการหา E โดยใช้สมการ (1) ต้องหาเทอมแต่ละเทอม ในสมการก่อนในกรณีนี้ จะได้

$$dl = ad\phi \quad ; \quad \vec{R} = a\left(-\vec{a}_\rho\right) + h\vec{a}_z$$

$$R = \left|\vec{R}\right| = \left[a^2 + h^2\right]^{1/2} \quad ; \quad \vec{a}_R = \frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|} \quad \text{หรือ} \quad \frac{\vec{a}_R}{R^2} = \frac{R}{\left|R^3\right|} = \frac{-a\vec{a}_\rho + h\vec{a}_z}{\left[a^2 + h^2\right]^{3/2}}$$

ดังนั้น

$$E = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{\left(-a\vec{a}_\rho + h\vec{a}_z\right)}{\left[a^2 + h^2\right]^{3/2}}\cdot ad\phi$$

พิจารณาการกระจายประจุมีลักษณะสมมาตร $\vec{E}$ ที่เกิดขึ้นในทิศทาง $\vec{a}_\rho$ หรือ E_ρ จะเป็นศูนย์เพราะว่าทุกส่วนย่อย(dl) จะมีส่วนที่อยู่ตรงข้ามกัน ซึ่งมีค่า $d\vec{E}_\rho$ เท่ากันแต่มีทิศตรงกันข้าม ทำให้ E_ρ หักล้างกันหมดไป เหลือเฉพาะองค์ประกอบ Z เท่านั้น

ดังนั้นจะได้ $$\vec{E} = \frac{\rho_L ah\vec{a}_z}{4\pi\varepsilon_o\left[h^2+a^2\right]^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{\rho_L ah\cdot\vec{a}_z}{4\pi\varepsilon_o\left[h^2+a^2\right]^{3/2}}\cdot\left[\phi\right]_0^{2\pi} = \frac{\rho_L ah\vec{a}_z}{2\varepsilon_o\left[h^2+a^2\right]^{3/2}}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2 แผ่นจำกัด $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$ บนระนาบ Z = 0 มีความหนาแน่นของประจุ

$\rho_S = xy\left(x^2+y^2+25\right)^{3/2}$ nC/ m^2 จงหา (ก) ประจุทั้งหมดบนแผ่น

(ข) ความเข้มสนามไฟฟ้า ที่ (0,0,5) (ค) แรงของประจุ –1 mC ที่(0,0,5)

วิธีทำ (ก) จาก $$Q = \int \rho_S\,ds = \int_0^1\int_0^1 xy\left(x^2+y^2+25\right)^{3/2}dxdy \quad \text{nC}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y\int_0^1\left(x^2+y^2+25\right)^{3/2}d\left(x^2\right)dy \quad \text{nC} \quad ;\ xdx = (1/2)d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y\ \frac{2}{5}\left(x^2+y^2+25\right)^{5/2}\Big|_0^1 dy$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1\frac{1}{2}\left[\left(y^2+26\right)^{5/2}-\left(y^2+25\right)^{5/2}\right]d\left(y^2\right) \quad ;\ ydy = (1/2)d(y^2)$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{7}\left[\left(y^2+26\right)^{7/2}-\left(y^2+25\right)^{7/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{35}\left[\left(27\right)^{7/2}+\left(25\right)^{7/2}-\left(26\right)^{7/2}\right] = 33.15\ \text{nC}$$ **ตอบ**

(ข) จาก $$\vec{E} = \int\frac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_o R^2}\cdot\vec{a}_R = \int\frac{\rho_S ds\left(r-r'\right)}{4\pi\varepsilon_o\left|r-r'\right|^3}$$

เมื่อ $r - r'$ =(0,0,5)-(x,y,5) =(-x,-y,5)

ดังนั้น $$\vec{E} = \int_0^1\int_0^1\frac{10^{-9}xy\left(x^2+y^2+25\right)^{3/2}\left(-x\vec{a}_x-y\vec{a}_y+5\vec{a}_z\right)dxdy}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+y^2+25\right)^{3/2}} \quad ;\ ds=dxdy$$

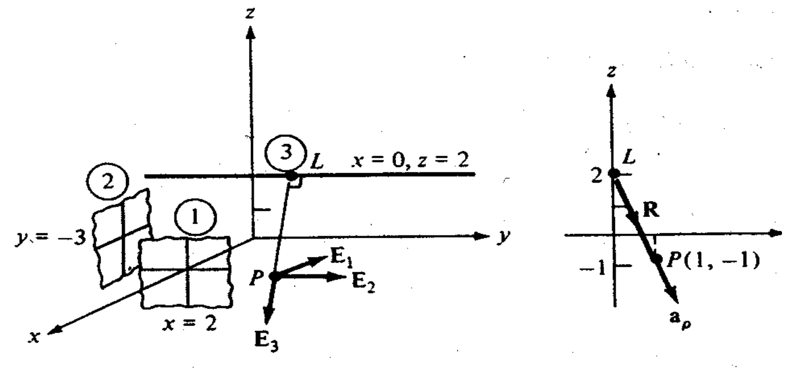
$$= 9\left[-\int_0^1 x^2dx\int_0^1 ydy\,\vec{a}x - \int_0^1 xdx\int_0^1 y^2dy\,\vec{a}y + 5\int_0^1 xdx\int_0^1 ydy\,\vec{a}z\right]$$

$$= 9\left(-\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{5}{4}\right) = (-1.5,-1.5,11.25)\ \text{V/m}$$ **ตอบ**

(ค) $\vec{F} = q\vec{E} = \left(-1^{-3}\right)\left(-1.5\vec{a}_x - 1.5\vec{a}_y + 11.25\vec{a}_z\right)$ V/m

$$= \left(+1.5\vec{a}_x + 1.5\vec{a}_y - 11.25\vec{a}_z\right) \quad \text{mN}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3 จากรูประนาบอนันต์ x = 2 และ y = -3 มีความหนาแน่นของประจุ 10 nC/m^2 และ 15 nC/m^2 ตามลำดับถ้าเส้นอนันต์ x = 0 , z = 2 มีประจุ 10π nC/m จงหา E ที่ (1,1-1) ซึ่งเกิดจากการกระจายของประจุ ระนาบอนันต์และเส้นอนันต์



(a) (b)

วิธีทำ กำหนดให้ E = E1+E2+E3 เมื่อ E1,E2,E3 (ทำให้เกิด E ที่จุด (1,1-1) เกิดจากแผ่นอนันต์ 1 แผ่นอนันต์ 2 และ เส้นอนันต์ 3 ตามลำดับ

จากสมการประจุเชิงพื้นผิวและเชิงเส้น $\vec{E}1 = \dfrac{\rho_{S1}}{2\varepsilon_o}\left(-\vec{a}_x\right)$

$$= \frac{-10 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot \left(10^{-9}/36\pi\right)} \cdot \vec{a}_x = -180\pi\vec{a}_x$$

$$\vec{E}2 = \frac{\rho_{S2}}{2\varepsilon_o} \cdot \vec{a}_y$$

$$= \frac{15 \cdot 10^{-9}}{2\left(10^{-9}/36\pi\right)} \cdot \vec{a}_y = 270\pi\vec{a}_y$$

$$\vec{E}3 = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho} \cdot \vec{a}_\rho$$

เมื่อ $\vec{a}_\rho$ = เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามทิศทางของ LP ที่ตั้งฉากกับประจุเชิงเส้น

ρ = ช่วงความยาว LP ที่พิจารณาจากรูป

$$\vec{R} = -3\vec{a}_z + \vec{a}_x \; ; \rho = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{10} \quad ; \vec{a}_\rho = \frac{\vec{R}}{\left|\vec{R}\right|} = \frac{\vec{a}_x - 3\vec{a}_z}{\sqrt{10}}$$

ดังนั้น $\vec{E}3 = \dfrac{10\pi \cdot 10^{-9}}{2\pi(10^{-9}/36\pi)} \cdot \dfrac{1}{10}(\vec{a}_x - 3\vec{a}_z) = 18\pi(\vec{a}_x - 3\vec{a}_z)$

$\therefore$ E ทั้งหมด $= \vec{E}1 + \vec{E}2 + \vec{E}3 = -162\pi\vec{a}_x + 270\pi\vec{a}_y - 54\pi\vec{a}_z$ V/m **ตอบ**

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. เส้นประจุที่มีประจุกระจายอย่างสม่ำเสมอ $\rho_L = 25$ nC/m อยู่ในแนวเส้นตรง x =-3 , z = 4 ใน free space จงหาความเข้มสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ ในระบบพิกัดฉากที่จุด (ก) Origin (ข)P1(2,15,3) (ง) P2(r = 4 , ϕ=60° , z = 2)

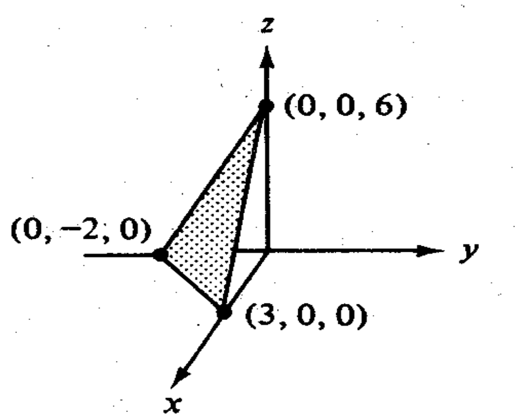
คำตอบ $53.9\vec{a}_x - 71.9\vec{a}_z ; 86.4\vec{a}_x - 17.3\vec{a}_z ; 77.5\vec{a}_x - 31.0\vec{a}_z$

2. ประจุกระจายอยู่บนระนาบ Z = -3 m ในบริเวณ $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$ m โดยมีความหนาแน่นประจุเป็น $\rho_S = 2(x^2 + y^2 + 9)^{3/2}$ nC/m^2 จงหาความเข้มสนามไฟฟ้า ณ จุด origin **ตอบ** $864\vec{a}_z$ V/m

3. ประจุกระจายอยู่บนจานกลม $r \le 4$m , Z = 0 โดยมีความหนาแน่นประจุเป็น $\rho_S = \dfrac{10^{-4}}{r}$ (C/m^2) จงหาความเข้มสนามไฟฟ้า ณ ตำแหน่ง r = 0 , z = 3m

คำตอบ $1.51\vec{a}_z$ **MV/m**

4. ประจุความหนาแน่นสม่ำเสมอ $\rho_S = -0.3 \quad nC/m^2$ กระจายอยู่บนระนาบ $2x - 3y + z = 6m$ จงหาความเข้มสนามไฟฟ้า เนื่องจากประจุเหล่านี้ ทางด้านหนึ่งของระนาบนี้ซึ่งจุด Origin อยู่



คำตอบ $\dfrac{16.94(-2\vec{a}_x + 3\vec{a}_y - \vec{a}_z)}{\sqrt{14}}$ V/m