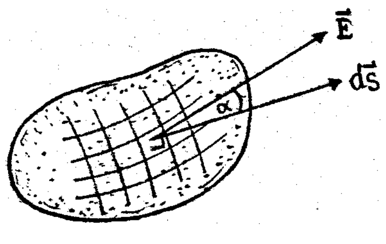
บทที่ 2.3 ความหนาแน่นของฟลักซ์สนามไฟฟ้า (Electric flux Density)

2.3.1 ฟลักซ์สนามไฟฟ้า (ψ)

ฟาราเดย์มีความสนใจเกี่ยวกับสนามไฟฟ้าสถิตย์ และผลของการใช้ฉนวนชนิดต่างๆ เป็นตัวกลางคั่นอยู่ในสนามไฟฟ้า จึงได้สร้างทรงกลมซ้อนร่วมจุดศูนย์กลางกันขึ้น โดยทรงกลมนอกเป็นครึ่งทรงกลม 2 ซีกประกบกันและมีฉนวนคั่นระหว่างทรงกลมทั้งสอง ในการทดลอง ฟาราเดย์ จะให้ประจุไฟฟ้าแก่ทรงกลมในแล้วประกบครึ่งทรงกลมแต่ละซีกของทรงกลมนอก ซึ่งมีฉนวนบุอยู่ภายในครอบทรงกลมในไว้ ต่อสายจากทรงกลมนอกลงดิน แล้วเอาออก จากนั้นจึงถอดทรงกลมนอกออกโดยใช้เครื่องมือที่เป็นฉนวน ทำการวัดปริมาณ ประจุบนทรงกลมนอกและใน ผลจากการทดลอง พบว่าประจุไฟฟ้า บนทรงกลมทั้งสองมีปริมาณเท่ากัน (แต่เป็นประจุไฟฟ้าชนิดตรงกันข้าม) โดยไม่ขึ้นอยู่กับชนิดของฉนวน(หรือไดอิเล็กตริก) ที่คั่นอยู่ ฟาราเดย์ จึงสรุปผลการทดลองว่า " มีการขจัดจากทรงกลมในไปยังทรงกลมนอกโดยไม่ขึ้นกับตัวกลาง" และเรียกการขจัดนี้ว่า Displacement flux หรือ Electric flux (ฟลักซ์สนามไฟฟ้า: ψ) โดย '**ฟลักซ์สนามไฟฟ้าจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณประจุและมีการขจัดในทิศทางเดียวกับเส้นแรงไฟฟ้า"**

2.3.2 ความหนาแน่นฟลักซ์สนามไฟฟ้า($\vec{D}$)

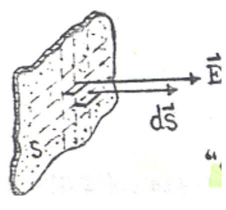


พิจารณาผิวปิดรูปร่างใดๆ ซึ่งปิดล้อมประจุไฟฟ้าไว้ภายในดังรูป ถ้าผิวปิดนี้วางอยู่ในสูญญากาศ หรือ free space แล้ว ฟลักซ์สนามไฟฟ้าค่าน้อยๆ ($d\psi$) ที่ผ่านผิวน้อยๆ (ds) บนผิวปิดนี้ไปได้ จะมีค่าเป็น $d\psi = \varepsilon_o (E \cos\alpha) ds = \varepsilon_o \vec{E} \cdot d\vec{s}$

นิยาม : โดยที่ $d\vec{s}$ เป็นเวกเตอร์แทนพื้นที่ ds มีขนาดเท่ากับพื้นที่ ds ทิศตั้งฉากและพุ่งออกจากพื้นที่ ds เสมอ

ฟลักซ์สนามไฟฟ้าที่ผ่านผิวปิด(ทั้งหมด) ไป จึงมีค่าเป็น $\boxed{\psi = \oint_s d\psi = \oint_s \varepsilon_o \vec{E} \cdot d\vec{s}}$

ในกรณีที่ความเข้มสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ มีค่าสม่ำเสมอทั่วพื้นผิวและมีทิศตั้งฉากกับพื้นผิวนั้นๆแล้ว ฟลักซ์ที่ผ่านพื้นผิวไปได้จะมีค่าเป็น $\boxed{\psi = \oint_s \varepsilon_o \vec{E} d\vec{s} = \varepsilon_o E \oint_s d\vec{s} = \varepsilon_o \vec{E} S}$



จะได้ $\psi / s = \varepsilon_o E$; ψ / s คือ ฟลักซ์สนามไฟฟ้าต่อหน่วยพื้นที่ เรียกว่า “ความหนาแน่นฟลักสนามไฟฟ้า” (Electric flux Density : $\vec{D}$)

ดังนั้น $\boxed{D = \frac{\psi}{s} = \varepsilon_o E}$ หรือเขียนแแบบเวกเตอร์ได้เป็น $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}}$

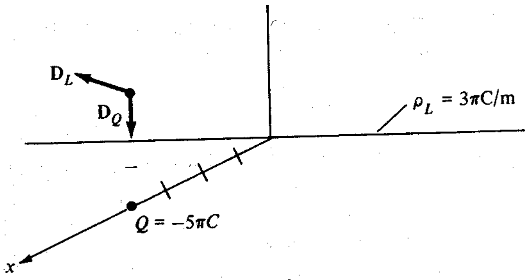
$\vec{D}$ จึงมีหน่วยเป็น $c / m^2 : \left[\frac{c^2}{Nm^2} \cdot \frac{N}{c} \right]$ และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{E}$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ ระหว่างฟลักซ์สนามไฟฟ้า และ ความหนาแน่นฟลักซ์สนามไฟฟ้าจึงเป็น

$$\boxed{\psi = \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s}} \text{.......********}$$

และฟลักซ์สนามไฟฟ้า: ψ จึงมีหน่วยเป็น $C : \left[\frac{C}{m^2} \cdot m^2 \right]$

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปถ้ามีประจุชนิดจุด -5π mC ที่(4,0,0) และมีประจุเชิงเส้น 3π mC/m ตามแนวแกน y จงหาความหนาแน่นของฟลักซ์ ไฟฟ้า D ที่ (4,0,3)



วิธีทำ กำหนด $D = D_Q + D_L$ โดย D_Qและ D_L เป็นความความหนาแน่นของฟลักซ์ ที่เกิดจากประจุชนิดจุด และประจุเชิงเส้นตามลำดับ

$$\therefore \quad \vec{D}_Q = \varepsilon_o \vec{E} = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \vec{a}_r = \frac{Q(r - r')}{4\pi |r - r'|^3}$$

เมื่อ $r - r' = (4,0,3)-(4,0,0) = (0,0,3)$

ดังนั้น $\vec{D}_Q = \dfrac{-5\pi \cdot 10^{-3}(0,0,3)}{4\pi |(0,0,3)|^3} = -0.138\vec{a}_z \text{......} mC / m^2$

และ $\vec{D}_L = \varepsilon_o \vec{E}$; $\vec{E} = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o \rho} \cdot \vec{a}_\rho$ (ประจุเชิงเส้น)

$$\therefore \quad \vec{D}_L = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \cdot \vec{a}_\rho$$

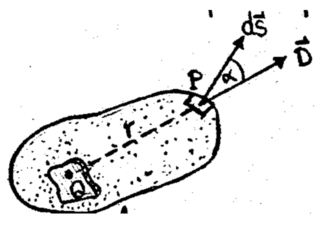
ในกรณีนี้ $\vec{a}_\rho = \dfrac{(4,0,3)-(0,0,0)}{|(4,0,3)-(0,0,0)|} = \dfrac{(4,0,3)}{5} = \dfrac{1}{5}\left(4\vec{a}_x + 3\vec{a}_z\right)$

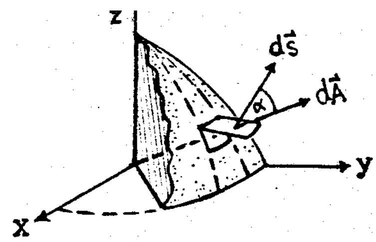
$\rho = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore \quad \vec{D}_L = \dfrac{3\pi}{2\pi(25)} \cdot \left(4\vec{a}_x + 3\vec{a}_z\right) = 0.24\vec{a}_x + 0.18\vec{a}_z \ldots\ldots\ldots mC / m^2$

$\therefore \quad \vec{D} = \vec{D}_Q + \vec{D}_L = 240\vec{a}_x + 42\vec{a}_z \ldots\ldots\ldots \mu C / m^2$ **ตอบ**

2.3.3 กฎของเกาส์ (Gauss's law)





พิจารณาจุดประจุ Q ที่อยู่ภายในผิวปิดรูปร่างใดๆ ใน free space ดังรูป $d\vec{s}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์แทนพื้นที่น้อยๆ บนผิวปิดรูปร่างใดๆ เขียนในเทอมของ r, θ, ϕ ได้โดยการเขียนผิวปิดทรงกลมรัศมี r ล้อมรอบจุดประจุ Q ไว้ ถ้าพื้นที่น้อยๆ บนผิวปิดทรงกลม ณ จุด P เท่ากับ dA

$d\vec{A}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์แทนพื้นที่ dA จึงมีทิศทางตามแนวรัศมี พุ่งออกจากผิวทรงกลม ณ จุด P เช่นเดียวกับ $\vec{D}$ (หรือ $\vec{E}$) ณ จุด P มุมระหว่าง $d\vec{A}$ กับ $d\vec{s}$ จึงเป็น α ด้วย ดังรูป

จากรูป $ds \cos\alpha = dA$ หรือ $dS = dA \sec\alpha$

$\because \quad dA = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$;

$\therefore \quad ds = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \sec\alpha$: สมการของพื้นที่น้อยๆ บนผิวปิดรูปร่างใดๆ

ฟลักซ์สนามไฟฟ้าที่พุ่งผ่านผิวปิดรูปร่างใดๆ ไปมีค่าเป็น $\psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$

เนื่องจาก $\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}$ และ $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2} \cdot \vec{a}_R$ $\quad \therefore \; \vec{D} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2} \cdot \vec{a}_R$

จึงได้

$$\psi = \oint_S \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \vec{a}_R \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi \sec\alpha \vec{a}_n$$

$$= \frac{Q}{4\pi} \oint_S \sin\theta d\theta d\phi \sec\alpha \left(\vec{a}_R \cdot \vec{a}_n\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\oint_S \sin\theta d\theta d\phi \sec\alpha\cos\alpha = \frac{Q}{4\pi}\oint_S \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\phi = \frac{Q}{4\pi}\left(-\cos\theta\right)_0^{\pi}\left[\phi\right]_0^{2\pi} = \frac{Q}{4\pi}(2)(2\pi)$$

$\therefore \quad \psi = Q \qquad$ …………******

ดังนั้น $\psi = \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$ สมการนี้คือ " **กฎของเกาส์** " ซึ่งมีใจความว่า " **ฟลักซ์สนามไฟฟ้าที่ตัดผ่านผิวปิดใดๆ จะมีค่าเท่ากับ ปริมาณประจุไฟฟ้าที่ถูกปิดล้อมอยู่ภายในผิวปิดนั้น"** โดยฟลักซ์สนามไฟฟ้าที่ตัดผ่านผิวปิดจะมีทิศพุ่เข้าหาผิวปิด หรือออกจากผิวปิด ก็ขึ้นอยู่กับชนิดของประจุไฟฟ้า Q เนื่องจากเส้นแรงไฟฟ้ามีทิศพุ่งออกจากประจุไฟฟ้าบวก และมีทิศพุ่งเข้าสู่ประจุไฟฟ้าลบ ฟลักซ์สนามไฟฟ้าของประจุไฟฟ้าลบ(ψ เป็นลบ) จึงมีทิศพุ่งเข้าสู่ผิวปิด ขณะที่ฟลักซ์สนามไฟฟ้าของประจุไฟฟ้าบวก (ψ เป็นบวก) มีทิศพุ่งออกจากผิวปิด

จากกรณีที่ผ่านมา แม้ว่าจะเป็นผลมาจากจุดประจุ แต่จะเห็นว่า ปริมาณฟลักซ์สนามไฟฟ้าที่ผ่านผิวปิดขึ้นอยู่กับปริมาณประจุสุทธิ ภายในผิวปิดนั้นเท่านั้น ไม่ขึ้นอยู่กับลักษณะการกระจายของประจุไฟฟ้าเลย นั่นคือ ไม่ว่าประจุไฟฟ้าจะกระจายกันอยู่เป็นกลุ่มของจุดประจุ ประจุเชิงเส้น ประจุเชิงพื้นผิว หรือประจุเชิงปริมาตร อยู่ในผิวปิดก็ตามถ้าปริมาณประจุสุทธิ ที่ถูกปิดล้อมอยู่ มีค่าเท่ากัน ฟลักซ์สนามไฟฟ้า ที่ผ่านผิวปิดนั้นจะมีค่าเท่ากัน ดังนั้น กฎของเกาส์ จึงใช้ได้ทั่วไปไม่ว่าประจุไฟฟ้าจะกระจายอยู่ในลักษณะใดก็ตาม และ Q ใน กฎของเกาส์ อาจมีค่าตามสมการ

$$Q = \sum_{I=1}^{n} Q_i$$

$$Q = \int_L \rho_L dL$$

$$Q = \int_S \rho_S dS$$

หรือ $$Q = \int_v \rho_V dV$$

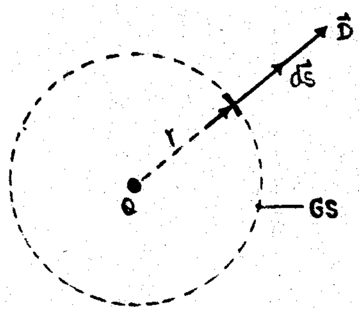
2.3.4 การประยุกต์กฎของเกาส์

1. **การประยุกต์กฎของเกาส์กับบริเวณที่มีประจุไฟฟ้ากระจายอยู่อย่างสมมาตร**

ในกรณีนี้ต้องเลือกผิวปิด(เรียกว่าผิวเกาส์เซียน: Gaussian Surfacf:GS) ให้เหมาะสมกับลักษณะการกระจายของประจุไฟฟ้า ผิวปิดที่เลือก ควรมีคุณลักษณะ 2 ประการดังนี้คือ

(1) ฟลักซ์สนามไฟฟ้า ต้องตัดผ่านในแนวตั้งฉาก หรือไม่ก็ขนาน กับผิวปิดที่เลือก ซึ่งมีผลทำให้ $\vec{D}\cdot d\vec{s}$ มีค่าเป็น Dds และ 0 ตามลำดับ

(2) บริเวณใดก็ตามบนผิวปิดที่ $\vec{D}\cdot d\vec{s}$ ไม่เป็น 0 แล้ว ความหนาแน่นฟลักซ์สนามไฟฟ้า $\vec{D}$ ต้องมีค่าคงที่ ทั่วทั้งผิวปิดนั้น



ตัวอย่างของการประยุกต์ในกรณีนี้ได้แก่ การหาความเข้มสนามไฟฟ้า จากจุดประจุ และประจุเชิงเส้น

การใช้กฎของเกาส์หาความเข้มสนามไฟฟ้า ณ ระหว่าง r จาก จุดประจุ Q

เลือกผิวปิดล้อมรอบจุดประจุ Q เป็นผิวทรงกลม รัศมี r **ณ** จุดใดๆ บนผิวทรงกลม $\vec{D}$ จะมีทิศไปทางเดียวกับ $d\vec{s}$ เสมอ โดยอยู่ในแนว $\vec{a}_R$ ณ จุด นั้นๆ ($\vec{D}$ มีทิศไปทางเดียวกับเส้นแรงไฟฟ้า)

จาก $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$ และ $\vec{D} \cdot d\vec{s} = Dds$ ทุกจุดบน ผิวทรงกลม

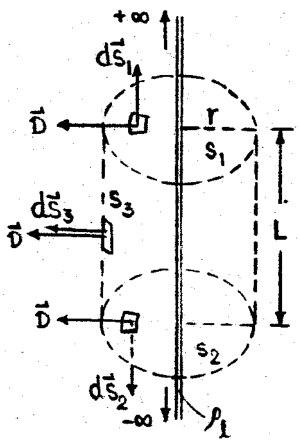
จึงได้ $\oint_S D \cdot ds = Q$ แต่ $\vec{D}$ มีค่าคงที่ ตลอดผิวทรงกลม (ความหนาแน่นเส้นแรงไฟฟ้าสม่ำเสมอทั่วผิวทรงกลม)

ดังนั้น $D\oint_S ds = Q$ โดย $\oint_S ds$ = พื้นที่ผิวทรงกลม รัศมี $r = 4\pi r^2$

$$\therefore \qquad D\left(4\pi r^2\right) = Q \qquad \textbf{หรือ} \qquad D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \text{............*******}$$

ถ้าจุดประจุวางอยู่ใน free space ก็จะได้ค่าความเข้มสนามไฟฟ้า ณ ระยะห่าง r จากจุดประจุประจุ Q เป็น $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \dfrac{kQ}{r^2}$ หรือ $\vec{E} = \dfrac{kQ}{r^2} \cdot \vec{a}_R$

การใช้กฎของเกาส์หาความเข้มสนามไฟฟ้า ณ ระยะห่าง r จากประจุไฟฟ้า ที่กระจายกันอยู่ อย่างสม่ำเสมอ เป็นเส้นตรงยาวมาก (Line Charge)



ถ้าความหนาแน่น ประจุต่อหน่วยความยาวเป็น ρL และเลือกผิวปิด ล้อมรอบ line charge เป็นทรงกระบอก รัศมี r ยาว L โดยที่ line charge อยู่ในแนวแกน ของทรงกระบอก

จาก $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$ จะได้ $\oint_{S1} \vec{D}\cdot d\vec{s}_1 + \oint_{S2} \vec{D}\cdot d\vec{s}_2 + \oint_{S3} \vec{D}\cdot d\vec{s}_3 = Q$

เพราะว่า $\vec{D}$ มีทิศตั้งฉากกับ $d\vec{s}1$ และ $d\vec{s}2$ แต่มีทิศขนานกับ $d\vec{s}3$ (เส้นแรงไฟฟ้าพุ่งออกตามแนวรัศมี)

$\therefore \quad \vec{D}\cdot d\vec{s}_1 = 0$; $\vec{D}\cdot d\vec{s}_2 = 0$ และ $\vec{D}\cdot d\vec{s}_3 = Dds_3$

จึงได้ $\oint_{S3} Dds_3 = Q$ เนื่องจาก $\vec{D}$ มีค่าคงที่ ตลอดผิวด้านข้างของทรงกระบอก

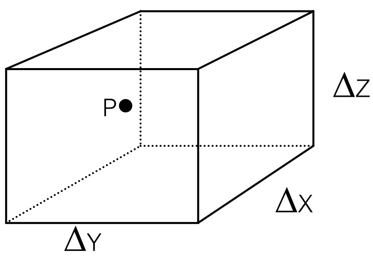
$\therefore \quad D\oint_{S3} ds_3 = Q$ แต่ $\oint_{s3} ds_3 = s_3 =$ พื้นที่ผิวด้านข้างของทรงกระบอก $= 2\pi rL$

จึงได้ $D(2\pi rL) = Q$; $\therefore \; D = \dfrac{Q}{2\pi rL}$ หรือ $D = \dfrac{\rho_L}{2\pi r}$ ......****** $\left(\because \rho_L = \dfrac{Q}{L}\right)$

ดังนั้น $E = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o r}$ และ $\vec{E} = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o}\cdot\vec{a}_r$

2. การประยุกต์กฎของเกาส์กับปริมาตรดิเฟอเรนเชียล

ถ้าประจุไฟฟ้ากระจายอยู่โดยไม่สมมาตรแล้ว เราก็ไม่สามารถเลือกผิวปิดที่เหมาะสมที่ $\vec{D}$ ในแนวตั้งฉากกับผิวปิดนี้ มีค่าคงที่ หรือเป็น ศูนย์ได้ การอินทิเกรท จะยุ่งยาก เช่นในกรณีกฎของคูลอมบ์ กรณีเช่นนี้ กฎของคูลอมบ์ก็ไม่มีประโยชน์ แต่เราสามารถลดความยุ่งยากนี้ลง และนำกฎของเกาส์มาใช้ได้โดยการเลือกผิวปิดของเกาส์ให้เล็กมาก จนถือได้ว่า $\vec{D}$ มีค่าเกือบคงที่ทั่วผิวปิดของปริมาตรเล็กๆ(ปริมาตรดิฟเฟอเรนเชียล)นี้



พิจารณาจุด $P(X, Y, Z)$ ในสนามไฟฟ้า ถ้าเลือกผิวปิดเป็นกล่องสี่เหลี่ยมเล็กๆ ความยาวเป็น Δx, Δy, Δz ล้อมรอบจุด P โดยจุด P อยู่ที่จุดศูนย์กลางของกล่องดังรูป และความหนาแน่น ฟลักซ์สนามไฟฟ้าที่ จุด P มีค่าเป็น

$$\vec{D}o = Do,x\vec{a}_x + Do,y\vec{a}_y + Do,z\vec{a}_z$$

จากกฎของเกาส์ $\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$ จะได้

$$\oint_F \vec{D}\cdot d\vec{s} + \oint_B \vec{D}\cdot d\vec{s} + \oint_L \vec{D}\cdot d\vec{s} + \oint_R \vec{D}\cdot d\vec{s} + \oint_T \vec{D}\cdot d\vec{s} + \oint_{bt} \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$$

เราจะแยกพิจารณาทีละพื้นผิวดังนี้

$$\oint_F \vec{D}\cdot d\vec{s} \equiv \vec{D}_F \cdot \Delta\vec{s}_F = \vec{D}_F \Delta y\Delta z\vec{a}_x = D_{x,F}\Delta y\Delta z$$

เราไม่ทราบค่าที่แน่นอนของความหนาแน่นฟลักซ์สนามไฟฟ้าที่พื้นผิวด้านหน้า($D_{x,\text{หน้า}}$) แต่หาค่าโดยประมาณได้โดยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ แล้วพิจารณา 2 เทอมแรก ซึ่งจะได้

$$D_{x,F} \equiv D_{o,x} + \frac{\Delta x}{2} \times \text{ÍÑµÃÒ¡ÒÃÅÒÕèÂ¹á»Å§¢Í§}Dx$$

$$\equiv D_{o,x} + \frac{\Delta x}{2}\cdot\frac{\partial Dx}{\partial x}$$

$$\therefore \oint_F \vec{D}\cdot d\vec{s} = \left(D_{o,x} + \frac{\Delta x}{2}\cdot\frac{\partial Dx}{\partial x}\right)\Delta y\Delta z$$

และ $\oint_B \vec{D}\cdot d\vec{s} \equiv \vec{D}_B \cdot \Delta\vec{s}_B = \vec{D}_B \cdot (\Delta y\Delta z)(\vec{a}_x) = -D_{x,B}\Delta y\Delta z$

โดย $D_{x,B} \equiv D_{o,B} - \frac{\Delta x}{2}\cdot\frac{\partial Dx}{\partial x}$ $\quad \therefore \oint_B \vec{D}\cdot d\vec{s} \equiv \left(-D_{O,X} + \frac{\Delta x}{2}\cdot\frac{\partial Dx}{\partial x}\right)\Delta y\Delta z$

จึงได้ $\oint_F \vec{D}\cdot d\vec{s} + \oint_B \vec{D}\cdot d\vec{s} \equiv \frac{\partial Dx}{\partial x}(\Delta x\Delta y\Delta z)$

และในทำนองเดียวกัน $\oint_L \vec{D}\cdot d\vec{s} + \oint_R \vec{D}\cdot d\vec{s} \equiv \frac{\partial \vec{D}y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$

$$\oint_T \vec{D}\cdot d\vec{s} + \oint_{BT} \vec{D}\cdot d\vec{s} \equiv \frac{\partial Dz}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

ดังนั้น

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} \equiv \left(\frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

หรือ $\boxed{\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q \equiv \left(\frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z}\right)\Delta v}$ ****************

:กฎของเกาส์สำหรับปริมาตรดิฟเฟอเรนเชียล

ตัวอย่างที่ 2 จงหาประจุในปริมาตรที่มี $1 \le r \le 2m$ ในพิกัดทรงกลม ถ้า

$$\rho_V = \frac{5\cos^2\phi}{r^4} .... C/m^3$$

วิธีทำ จาก $dQ = \rho dv$

ประจุเชิงปริมาตร $Q = \int_v \rho_v \, dv$

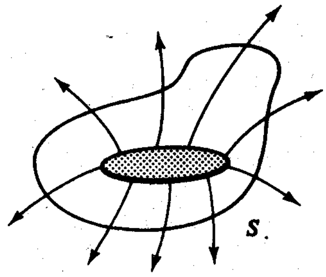
$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^2 \left(\frac{5\cos^2\phi}{r^4} \right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

$=$

$=$

$= 5\pi$ C **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3 มีฟลักซ์ (ψ) สุทธิเท่าใดที่ผ่านผิวปิด S ดังแสดงในรูป โดย S บรรจุประจุที่กระจายตัวในรูปของระนาบดิสก์รัศมี 4m ด้วยความหนาแน่น $\rho_S = \frac{(\sin^2\phi)}{2r} \ldots (C/m^2)$



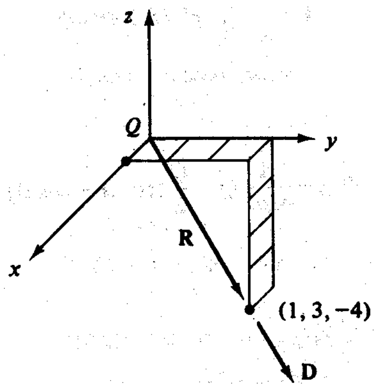
วิธีทำ จาก $\psi = Q_{enc} = \int_0^{2\pi} \int_0^{4} \left(\frac{\sin^2\phi}{2r} \right) r dr d\phi$; ประจุเชิงพื้นผิว $Q = \int_S \rho_S \, ds$

$=$

$=$

$= 2\pi$ C **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4 ประจุชนิดจุด $Q = 30..nC$ อยู่ที่กำเนิดในระบบพิกัดฉาก จงหาความหนาแน่นฟลักซ์ (D) ที่ (1,3,-4)



วิธีทำ จาก $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \vec{a}_R$

$$= \frac{30 \times 10^{-9}}{4\pi(26)} \cdot \left(\frac{\vec{a}x + 3\vec{a}y - 4\vec{a}z}{\sqrt{26}} \right)$$

$$= \left(9.18 \times 10^{-11}\right) \left(\frac{\vec{a}x + 3\vec{a}y - 4\vec{a}z}{\sqrt{26}} \right)$$

$D = 9.18 .... pC / m^2$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 5 จงหาฟลักซ์ที่ผ่านพื้นที่ขนาด 1 m^2 ซึ่งตั้งฉากกับแกน x ที่ x = 3m เมื่อกำหนดให้ $D = 10x\vec{a}_n .....C / m^2$

วิธีทำ เนื่องจาก D มีค่าคงที่และตั้งฉากกับพื้นที่นี้

$$\psi = DA....,\ D = 10(3)\vec{a}_n .....;\ A = 1m^2$$

$$\therefore \psi = 30\left(C / m^2\right)\left(1m^2\right)$$

$= \mathbf{30}$ C **ตอบ**

ตัวอย่างที่6 เส้นสนามไฟฟ้าเอกรูป (uniform electric flux) มีความหนาแน่นสนามไฟฟ้า $\vec{D} = 2...C / m^2$ อยู่ในทิศทางเวกเตอร์ $3\vec{a}x - 4\vec{a}y$ จงหาขนาดของเส้นสนามไฟฟ้าที่ผ่านระนาบ yz บริเวณ $y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$

วิธีทำ

$$\vec{a}_R = \frac{3\vec{a}x - 4\vec{a}y}{\sqrt{9+6}} = \frac{3\vec{a}x - 4\vec{a}y}{5}$$

$$\vec{D} = \left|\vec{D}\right| \cdot \vec{a}_R = \frac{2}{5}\left(3\vec{a}x - 4\vec{a}y\right) = 1.2\vec{a}x - 1.6\vec{a}y$$

$$\therefore \vec{D} = D_X \vec{a}x + D_Y \vec{a}y$$

จากโจทย์ จะเห็นว่า เฉพาะ Dx ในทิศทาง $\vec{a}x$ เท่านั้น ที่ผ่านระนาบ yz บริเวณ $y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ นั่นคือ มีพื้นที่ $s = 1m^2$

$$\therefore \quad \psi = D_X \cdot S = 1.2 \times 1 = 1.2 ....C$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่7 ประจุเชิงเส้นแบบเอกรูป (uniform line charge) มีค่า $\rho_L = 30\pi....C / m$ อยู่บนเส้นตรงตลอดแนวของแกน Z จงหาขนาดของความหนาแน่นสนามไฟฟ้าที่อยู่ในทิศทางของเวกเตอร์ $-\vec{a}x + 2\vec{a}y - 2\vec{a}z$ ที่จุด (2,0,0)

วิธีทำ $\vec{D}$ ที่อยู่ในทิศทางของ $-\vec{a}x + 2\vec{a}y - 2\vec{a}z$ คือ

$$\vec{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \cdot \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_n = \frac{-\vec{a}x + 2\vec{a}y - 2\vec{a}z}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{-\vec{a}x + 2\vec{a}y - 2\vec{a}z}{3}$$

$$\vec{D} = \frac{30\pi}{2\pi(2)} \cdot \left(\frac{-\vec{a}x + 2\vec{a}y - 2\vec{a}y}{3} \right) = \frac{5}{2}\left(-\vec{a}x + 2\vec{a}y - 2\vec{a}z\right)......C/m^2$$

เนื่องจาก $\vec{D}$ ที่จุด (2,0,0) อยู่ในทิศทางของ $\vec{a}x$ เท่านั้น

$\therefore$ ขนาดของความหนาแน่นสนามไฟฟ้า $= \vec{D} \cdot \vec{a}x$

$$\vec{D}_X = \frac{5}{2}\left(-\vec{a}x + 2\vec{a}y - 2\vec{a}z\right) \cdot \vec{a}x$$

$$= 2.5 \quad C/m^2$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 8 ถ้าความหนาแน่นประจุ $\rho_V = 5r...(C/m^3)$ ในระบบพิกัดทรงกลม จงใช้กฎของเกาส์หาความหนาแน่นฟลักซ์สนามไฟฟ้าจากประจุนี้

วิธีทำ จาก $\psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{enc} = \int_V \rho_V dv$

$$\therefore \quad \oint_S \left(Dr\vec{a}r + D\theta\vec{a}\theta + D\phi\vec{a}\phi\right)\left(r^2 \sin\theta d\theta d\phi\right)\vec{a}r = \int_V 5r\left(r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi\right)$$

$$\oint_S D_r r^2 \sin\theta d\theta d\phi........ = ... 5\int_V r^3 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$D_r r^2 \oint_S \sin\theta d\theta d\phi = 5\int_V r^3 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$D_r r\left(4\pi r^2\right) = 5\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^r (4\pi) = \frac{5}{4}r^4$$

$$D_r = \frac{5}{4}r^2 \quad \text{หรือ} \quad \vec{D} = \frac{5}{4}r^2 \cdot \vec{a}r$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัดท้ายบท

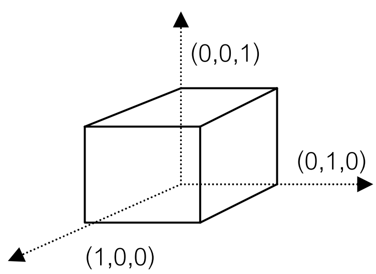
1. กำหนด $\vec{D} = z\rho\cos^2\phi\vec{a}_z .....C/m^2$

(ก) จงหาความหนาแน่นประจุไฟฟ้า ณ จุด $(1, \pi/4, 3)$

(ข) จงหาประจุไฟฟ้าที่ถูกปิดล้อมด้วย รูปทรงกระบอกรัศมี หนึ่งเมตร สูง $-2 \le z \le 2...m$

คำตอบ (ก) 0.5 C/m^2 (ข) $\frac{4\pi}{3}....C$

2.กำหนด $\vec{D} = y\vec{a}_x + x\vec{a}_y + z\vec{a}_z$ จงหาเส้นสนามไฟฟ้าที่ออกจากเส้นปริมาตรลูกบาศก์ดังรูป



คำตอบ $Q = \psi = 1C$

3. กำหนด Q = 100 μC ในอากาศ อยู่ที่จุด เริ่มต้น จงหาเส้นสนามไฟฟ้าทั้งหมดที่ผ่านผิวทรงกลม ระหว่าง $45^\circ \angle \theta \angle 120^\circ$ รัศมี $r = 4$ เมตร ที่มุม φ ใด ๆ

คำตอบ $-50 \times 10^{-6}\left(\cos 120^\circ - \cos 45^\circ\right)$

4. จงหาขนาดของความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า ณ จุด P(3,-4,5) ภายในสนามของ

(ก) จุดประจุ 0.2 μC ที่จุด Origin (ข) Line Charge $\rho_L = 30 .... nC / m$ แนวแกน Z

(ค) ประจุเชิงผิว $\rho_S = 0.07\pi .... nC / m^2$ ระนาบ X = 5

คำตอบ (ก) 318.3 pC/m^2 (ข) 954.9 pC/m^2 (ค) 109.96 pC/m^2

5. ปริมาณสุทธิ ภายในลูกบาศก์ที่มีศูนย์กลางอยู่ที่จุด Origin มีด้านขนานกับ แกนทั้ง 3 ความยาวด้านละ 2 เมตร ถ้าความหนาแน่นประจุมีค่าเป็น $\rho_V = 50x^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) ..... mC / m^2$

คำตอบ 84.9 μC

6. ถ้าความหนาแน่นประจุพิกัดทรงกลมมีค่าเท่ากับ $\rho = \frac{\rho_o}{\left(r / r_o\right)^2} \cdot e^{-r/r_o} \cdot \cos^2 \phi$ จงหาปริมาณประจุภายในทรงกลมรัศมี $r = r_o$; $r = 5r_o$ และ $r = \infty$

คำตอบ $3.97 \rho_o r_o^{\ 3}$; $6.24 \rho_o r_o^{\ 3}$; $6.28 \rho_o r_o^{\ 3}$

7. ตัวนำทรงกระบอกร่วมแกนยาวอนันต์ โดยทรงกระบอกในมีรัศมี a ทรงกระบอกนอกมีรัศมี b มีประจุกระจายอยู่อย่างต่อเนื่องสม่ำเสมอ ρS บนผิวของตัวนำ จงหาความเข้มสนามไฟฟ้า$\left(\vec{D}\right)$ที่ระยะr จากแกนของทรงกระบอก เมื่อ $a \angle r \angle b$

คำตอบ $Dr = \frac{\rho_s}{r} \cdot a$ **หรือ** $E_r = \frac{\rho_s a}{\varepsilon_o r}$ หรือ $\vec{E}_r = \frac{\rho_S a}{\varepsilon_o r} \cdot \vec{a}_r$