บทที่ 2 เวกเตอร์ (Vector)

เนื้อหาประกอบด้วย
2.1 ระบบพิกัด
2.2 เวกเตอร์
2.3 ส่วนประกอบของเวกเตอร์
2.4 การบวกเวกเตอร์
2.5 เวกเตอร์ตำแหน่ง
2.6 การคูณเวกเตอร์

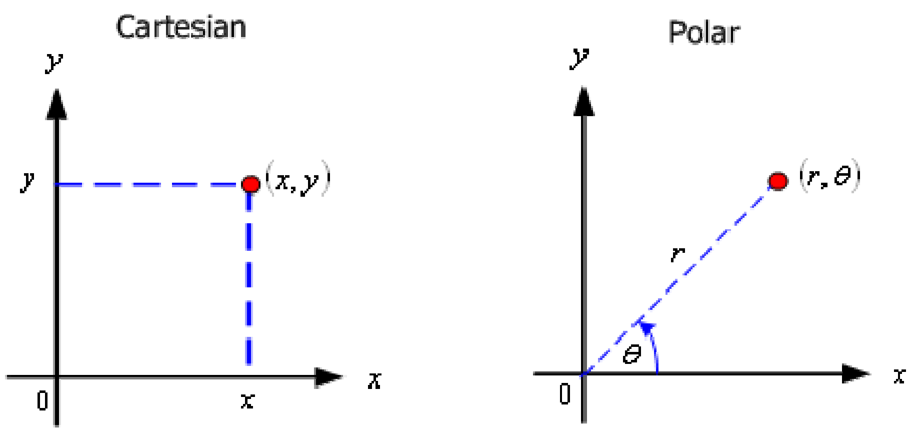
เวกเตอร์เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่ง ซึ่งดูเหมือนไม่มีความจำเป็นแต่เป็นเครื่องมืออย่างแรกที่ต้องใช้ อย่างไรก็ตามในการศึกษาทางฟิสิกส์เวกเตอร์เป็นเครื่องมือที่มีความสำคัญ เพื่อช่วยในอำนวยความสะดวกในการคำนวณ

2.1 ระบบพิกัด (แกนอ้างอิง)

ระบบพิกัดมีความสำคัญเพื่อช่วยในการวัดมีความหมาย เช่นอีก 800 m ถึงอาคารวิทยาศาสตร์เป็นการบอกที่ไม่สมบูรณ์ เนื่องจากไม่ทราบว่าเริ่มต้นที่ตำแหน่งใด

ดังนั้นในการกำหนดระบบพิกัดต้องทราบ
ก. จุดเริ่มต้น
ข. ชนิดของระบบพิกัด (พิกัดฉาก ; พิกัดเชิงขั้ว ; พิกัดทรงกระบอก)
ค. ทิศตามแกน

ระบบพิกัดแบบมาตรฐานใน 2 มิติ
ได้แก่ระบบพิกัดฉาก (Cartesian) และ ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar)

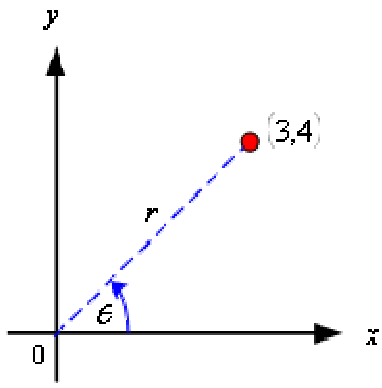


$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

รูปที่ 2.1 แสดงระบบพิกัดใน 2 มิติ

ตัวอย่างที่ 2.1 จงหาระบบพิกัดเชิงขั้วของจุด $(3m,4m)$ ดังรูปที่ 2.2



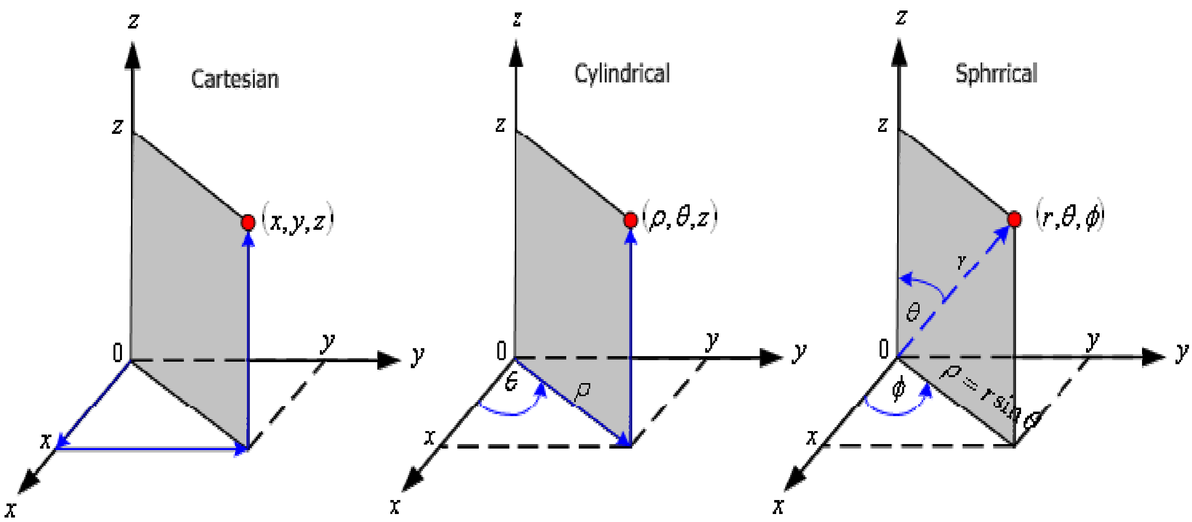
รูปที่ 2.2

วิธีทำ จากทฤษฎีพิธากอรัส

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(3m)^2 + (4m)^2}$$
$$= 5m$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3m}{4m}\right)$$
$$= 53.1^0$$

ระบบพิกัดแบบมาตรฐานใน 3 มิติ

ได้แก่ระบบพิกัดฉาก (Cartesian) และ ระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical) และระบบพิกัดทรงกลม (Spherical)

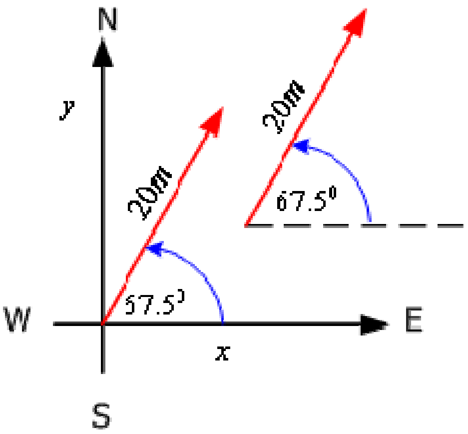


รูปที่ 2.3 ระบบพิกัดฉากใน 3 มิติ

2.2 เวกเตอร์

สเกลาร์ : ปริมาณที่มีเฉพาะขนาดอย่างเดียว
เวกเตอร์ : ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง

ตัวอย่างที่ 2.2 นักศึกษาคนหนึ่งเดินทางไปทางทิศตะวันออกเฉียงไปทางเหนือได้ระยะทาง $20m$ ดังรูปที่ 2.4 ขวามมือ จงเขียนรูปแสดงการเดินทางในรูปของเวกเตอร์



วิธีทำ เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้ดังรูปที่ 2.4 ทางซ้ายมือ เมื่อความยาวของลูกศรแทนขนาดของเวกเตอร์มีค่าเท่ากับ $4cm$ (โดยใช้มาตราส่วน $5m:1cm$) หัวลูกศรแสดงทิศทางของเวกเตอร์

รูปที่ 2.4

ข้อสังเกตุ เวกเตอร์สามารถเลื่อนออกจากจุดเริ่มต้นได้ โดยขนาดและทิศทางคงที่

การเขียนเวกเตอร์ดังรูปที่ 2.4 เป็นการไม่สะดวกเราสามารถเขียนใหม่ได้เป็น $\vec{r} = 20m$ ทำมุม 67.5^0 กับแกน x ในหนังสือเล่มนี้จะแทนเวกเตอร์ด้วย $\vec{r}$

2.4 ส่วนประกอบของเวกเตอร์

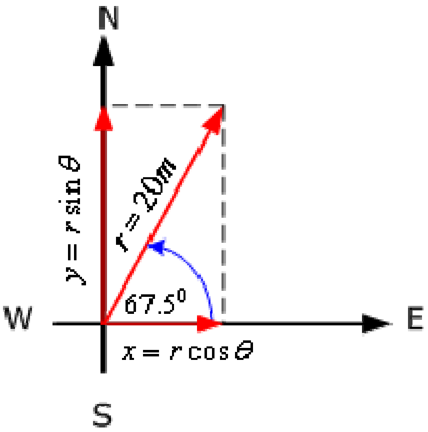
ตัวอย่างที่ 2.3 นักศึกษาคนหนึ่งเดินทางไปทางทิศตะวันออกเฉียงไปทางทิศเหนือได้ระยะทาง $20m$ ดังรูปที่ 2.5 จงหาระยะทางที่เขาเดินทางได้ในทิศเหนือและทิตะวันออก

วิธีทำ เปลี่ยนจากระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นระบบพิกัดฉากจากรูปที่ 2.5 จะได้

$$y = r\sin\theta$$
$$= (20m)(\sin 67.5^0)$$
$$= 18.5m$$ ทิศเหนือ

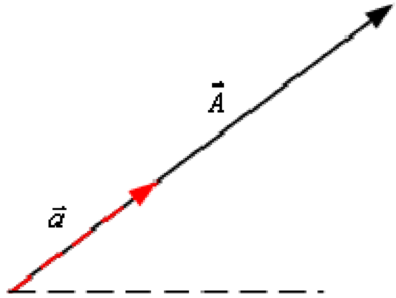
$$x = r\cos\theta$$
$$= (20m)(\cos 67.5^0)$$
$$= 7.65m$$ ทิศตะวันออก

ส่วนของเวกเตอร์ $\vec{r}$ บนแกน x และ y เราเรียกว่า **"ส่วนประกอบ"** ของเวกเตอร์ $\vec{r}$



รูปที่ 2.5

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย คือเวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย และมีทิศทางตามเวกเตอร์ที่พิจารณา เช่น ให้ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ A และ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่มีทิศเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{A}$ ดังรูปที่ 2.6



$$\vec{a} = \frac{\vec{A}}{A}$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$\vec{A} = A\vec{a}$$

รูปที่ 2.6

ดังนั้นในระบบพิกัดแกนมุมฉาก เวกเตอร์หนึ่งหน่วยแทนด้วย

$\vec{i}$ มีขนาด 1 หน่วยทิศตามแกน x

$\vec{j}$ มีขนาด 1 หน่วยทิศตามแกน y

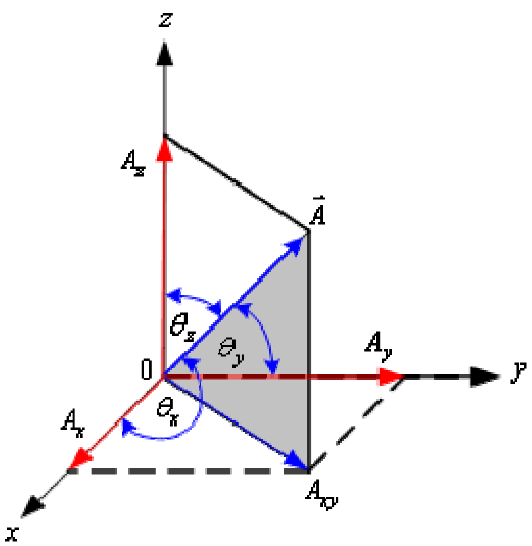
$\vec{k}$ มีขนาด 1 หน่วยทิศตามแกน z

โดยเวกเตอร์ทั้งสามตั้งฉากซึ่งกันและกัน และเวกเตอร์ทั้งสามจะเรียงกันในทิศทวนเข็มนาฬิกา

จากตัวอย่างที่ 2.3 คำตอบที่ได้สามารถเขียนใหม่ได้เป็น $\vec{r} = (7.65m)\vec{i} + (18.5m)\vec{j}$ เป็นการเขียนในรูปแบบมาตรฐานซึ่งมีความสะดวกมากเมื่อนำไปใช้ในการบวกและการคูณเวกเตอร์

รูปแแบบทั่ว ๆ ไปของเวกเตอร์เขียนได้ดังนี้ $\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$ เมื่อ r_x คือส่วนประกอบบนแกน x ของ $\vec{r}$; r_y คือส่วนประกอบบนแกน y ของ $\vec{r}$; r_z คือส่วนประกอบบนแกน z ของ $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์ใน 3 มิติ

ส่วนประกอบของเวกเตอร์ใน 3 มิติ



รูปที่ 2.7

ถ้า $\vec{A}$ อยู่บนระบบพิกัดฉาก x ; y ; z โดยที่ $\vec{A}$ ทำมุม θ_x ; θ_y ; θ_z กับแกน x ; y และ z ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.7

ส่วนประกอบของ $\vec{A}$ บนระนาบ xy และ z คือ

$$\vec{A} = \vec{A}_{xy} + \vec{A}_z$$

$$= \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

เพราะว่า $\vec{A}_{xy} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$

แต่ $A_x = A\cos\theta_x$

$A_y = A\cos\theta_y$

$A_z = A\cos\theta_z$

ทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{A}$ หาได้โดยใช้โคไซน์บอกทิศ (direction cosine) โดยที่

$\cos\theta_x = \dfrac{A_x}{A}$; $\cos\theta_y = \dfrac{A_y}{A}$; $\cos\theta_z = \dfrac{A_z}{A}$ เมื่อ

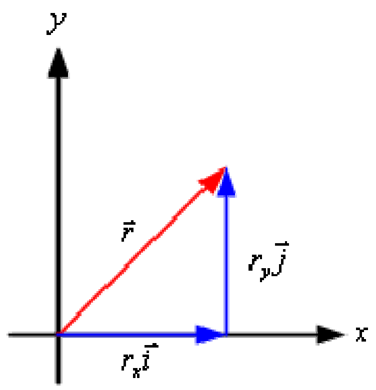
$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = \frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2} = 1$$

ดังนั้นส่วนประกอบของ $\vec{A}$ บนแกน x ; y และ z เขียนใหม่ได้เป็น

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$
$$= A\cos\theta_x\vec{i} + A\cos\theta_y\vec{j} + A\cos\theta_z\vec{k}$$

2.4 การบวกเวกเตอร์

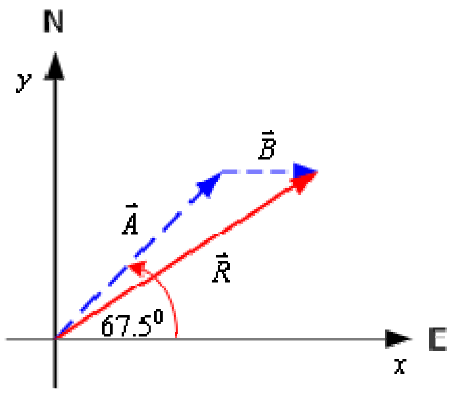
เวกเตอร์ $\vec{r}$ สามารถหาได้จากส่วนประกอบของเวกเตอร์เข้าด้วยกันแสดงดังรูปที่ 2.8 เมื่อ $\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j}$



การบวกเวกเตอร์ทำได้โดยการนำหางของเวกเตอร์ตัวที่สอง $(r_y\vec{j})$ ต่อเข้ากับหัวของเวกเตอร์อันแรก $(r_x\vec{i})$ ส่วน $\vec{r}$ ได้จากการลากจากหางของเวกเตอร์อันแรกไปยังหัวเวกเตอร์ตัวที่สอง

รูปที่ 2.8 แสดงการบวกเวกเตอร์

ตัวอย่างที่ 2.4 จงหาระยะการกระจัดทั้งหมดของนักศึกษาคนหนึ่งซึ่งเดินทางไปทางทิศตะวันออกเฉียงไปทางเหนือได้ระยะทาง $\vec{A} = 20m$ จากนั้นเดินทางไปทางทิศตะวันออก $\vec{B} = 5m$ ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 2.3 ระยะการกระจัดครั้งแรกคือ

$$\vec{A} = (7.65m)\vec{i} + (18.5m)\vec{j}$$

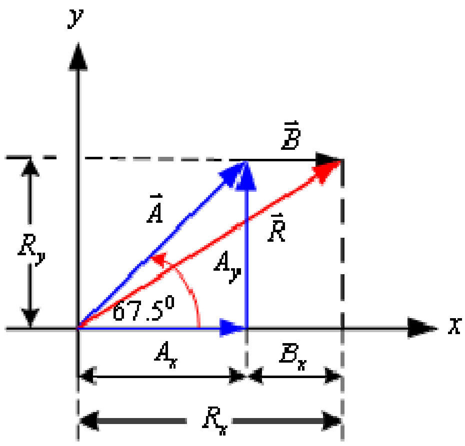
ระยะการกระจัดครั้งที่ 2

$$\vec{B} = (5m)\vec{i}$$

คำตอบที่ได้คือเวกเตอร์ $\vec{R}$ ซึ่งเราเรียกว่า **ผลลัพธ์** ผลลัพธ์ที่ได้นี้สามารถหาได้ดังนี้

ก. เขียนรูป โดยการกำหนดมาตราส่วนแล้วนำมาเขียนรูปผลลัพธ์ที่ได้ หาได้โดยการวัดดังรูปที่ 2.9

ข. วิธีคำนวณ โดยการแยกองค์ประกอบของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ลงบนบนแกน x และแกน y จากนั้นนำองค์ประกอบในแต่ละแกนมารวมกัน



รูปที่ 2.10

องค์ประกอบบนแกน x ของเวกเตอร์ $\vec{R}$ หาได้จากการนำองค์ประกอบบนแกน x ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มาบวกกัน

$$R_x = A_x + B_x$$
$$= 7.65m + 5m$$
$$= 12.7m$$

ในทำนองเดียวกันองค์ประกอบบนแกน y ของเวกเตอร์ $\vec{R}$ หาได้จากการนำองค์ประกอบบนแกน y ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มาบวกกัน

$$R_y = A_y + B_y$$
$$= 18.5m + 0m$$
$$= 18.5m$$

ค. ใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

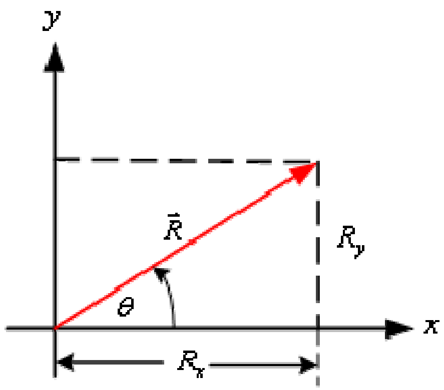
เมื่อ $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

$$= \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j}\right) + \left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j}\right)$$

จัดรูปใหม่

$$\vec{R} = \left(A_x + B_x\right)\vec{i} + \left(A_y + B_y\right)\vec{j}$$
$$= (12.7m)\vec{i} + (18.5m)\vec{j}$$

จากคำตอบที่ได้ในข้อ ข. และ ข้อ ค. เราสามารถหาผลลัพธ์ได้โดยใช้พิธากอรัส และอาศัยฟังก์ชั่นทางตรีโกณมิติจากสามเหลี่ยมมุมฉากดังรูปที่ 2.11 จากวิธีคำนวณจะสังเกตุเห็นว่าเมื่อเขียนอยู่ในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทำให้เราสามารถหาผลลัพธ์ได้สะดวกยิ่งขึ้น

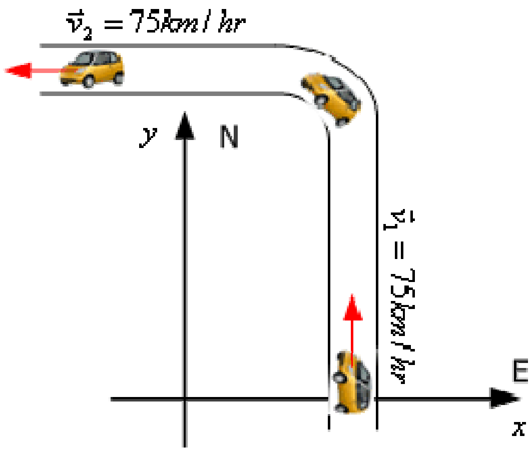


รูปที่ 2.11

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$= \sqrt{(12.7m)^2 + (18.5m)^2}$$
$$= 22.4m$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{18.5m}{12.7m}\right)$$
$$= 55.5^0 \text{ กับแกน } x$$

นอกจากนี้ปริมาณเวกเตอร์ได้แก่ การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง แรง โมเมนตัม ทอร์ค น้ำหนักเป็นต้น

ตัวอย่างที่ 2.5 รถยนต์คันหนึ่งวิ่งไปทางทิศเหนือด้วยความเร็ว $75 km/hr$ จากนั้นเลี้ยวไปทางทิศตะวันตกและวิ่งด้วยความเร็ว $75 km/hr$ ดังรูปที่ 2.12 จงหาการเปลี่ยนแปลงความเร็วของรถยนต์

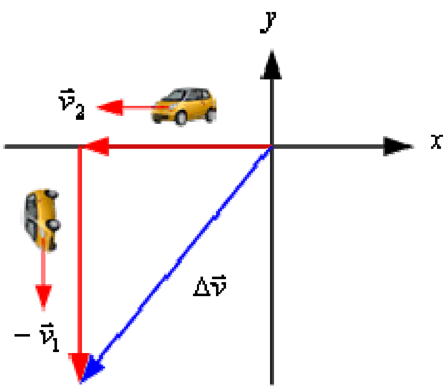


รูปที่ 2.12

วิธีทำ จากรูปที่ 2.12 เมื่อนำมาเขียนในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\vec{v}_1 = \left(75\frac{km}{hr}\right)\vec{j}$$

$$\vec{v}_2 = \left(75\frac{km}{hr}\right)\left(-\vec{i}\right)$$



รูปที่ 2.13

แต่อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วคือ

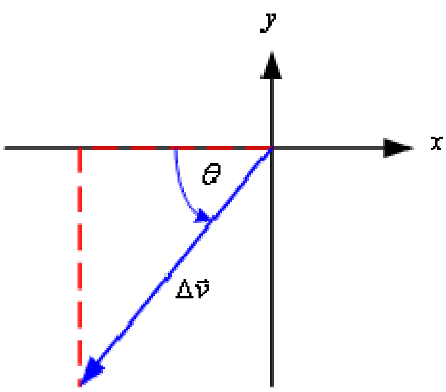
$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$= \vec{v}_2 + \left(-\vec{v}_1\right)$$

นั่นคือการลบเวกเตอร์ เป็นการบวกเวกเตอร์ในทิศตรงกันข้ามคือ $-\vec{v}_1$ เมื่อนำรูปมาเขียนใหม่ได้ดังรูปที่ 2.13 ดังนั่นอัตราเร็วเมื่อเขียนอยู่ในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\Delta\vec{v} = \left(-75\frac{km}{hr}\right)\vec{j} - \left(75\frac{km}{hr}\right)\vec{i}$$

$$= \left(-75\frac{km}{hr}\right)\vec{i} - \left(75\frac{km}{hr}\right)\vec{j}$$



รูปที่ 2.14

เราสามารถหาขนาดและทิศทางของ $\Delta\vec{v}$ ได้ดังนี้

$$\Delta\vec{v} = \sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2}$$

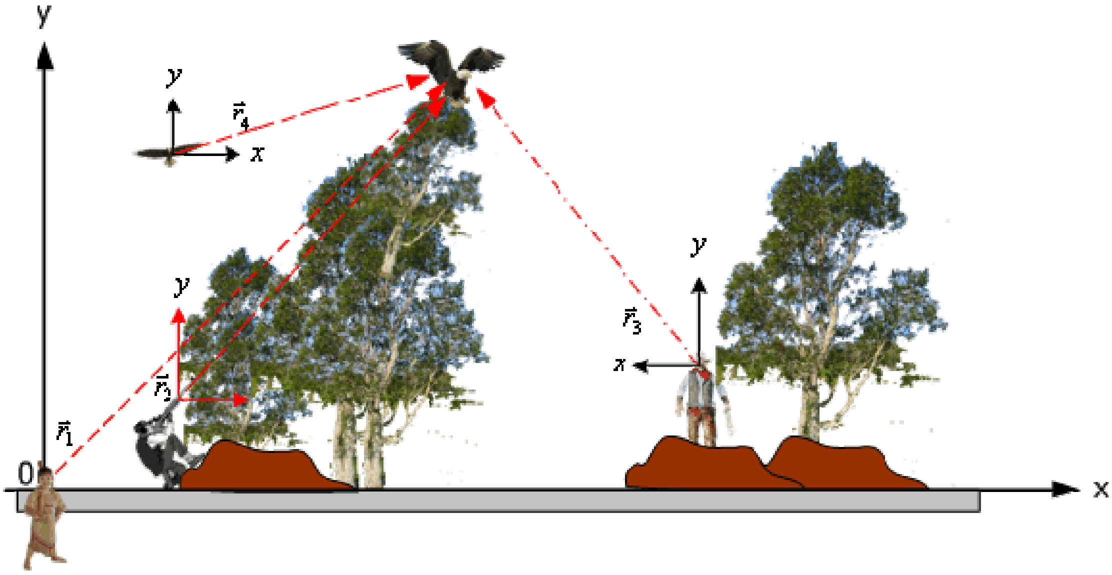
$$= \sqrt{\left(-75\frac{km}{hr}\right)^2 + \left(-75\frac{km}{hr}\right)^2}$$

$$= 106\frac{km}{hr}$$

$$\theta = \tan^{1}\left(\frac{\Delta v_y}{\Delta v_x}\right)$$
$$= \tan^{-1}\frac{-75(km/hr)}{-75(km/hr)}$$
$$= 45^0$$ กับแกน $-x$ ดังรูปที่ 2.14

2.5 เวกเตอร์ตำแหน่ง

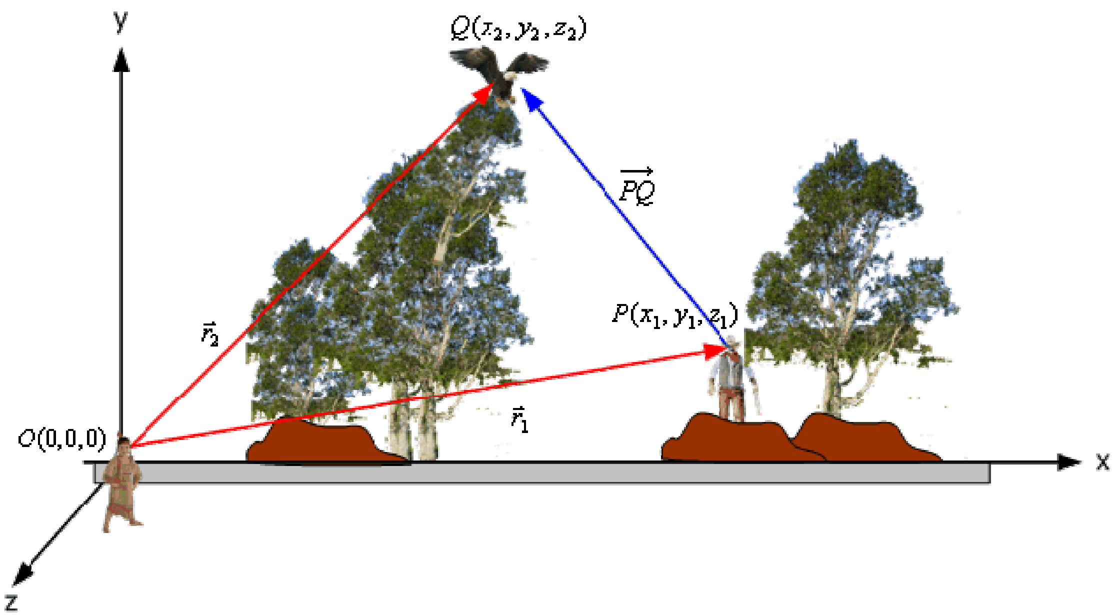
เวกเตอร์ตำแหน่ง คือเวกเตอร์ทีบอกตำแหน่งของวัตถุเมื่อเทียบกับจุดใดจุดหนึ่งดังรูปที่ 2.15



รูปที่ 2.15 แสดงเวกเตอร์ตำแหน่ง

จากรูปที่ 2.15 เด็กผู้หญิง นายพราน ผู้ชาย และนกตัวที่บิน สังเกตุนกตัวที่เกาะอยู่บนต้นไม้โดยเทียบกับตัวเอง เช่น $\vec{r}_3$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของผู้ชายเทียบกับนกตัวที่เกาะอยู่บนต้นไม้ หรือ $\vec{r}_4$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของนกตัวที่บินเทียบกับนกตัวที่เกาะบนต้นไม้

ตำแหน่งของนกที่เกาะอยู่บนต้นบนไม้จะอยู่ที่ตำแหน่งต่างกันเมื่อผู้สังเกตต่างกันดังนั้น ดังนั้นเพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าวการบอกเวกเตอร์ตำแหน่ง จึงกำหนดจุดใดจุดหนึ่งเป็นจุดเปรียบเทียบ ไม่ว่าใครจะเป็นผู้สังเกตก็ให้ใช้จุดเปรียบเทียบจุดเดียวกัน แสดงดังรูปที่ 2.16



รูปที่ 2.16 เวกเตอร์ตำแหน่งของจุด P และจุด Q

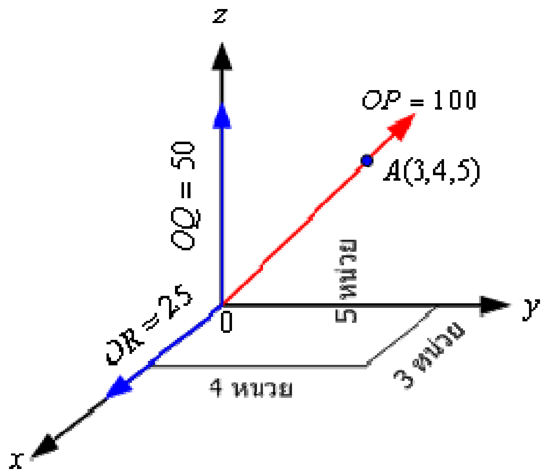
จากรูปที่ 2.16 ให้ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด P (ผู้ชาย) อยู่ที่ตำแหน่ง (x_1, y_1, z_1) และ Q (นกเกาะที่ต้นไม้) อยู่ที่ตำแหน่ง (x_2, y_2, z_2) เมื่อเทียบกับจุด O (เด็กผู้หญิง) อยู่ที่ตำแหน่ง $(0,0,0)$ จะได้

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP} \qquad (O \text{ มอง } P)$$
$$= (x_1 - 0)\vec{i} + (y_1 - 0)\vec{j} + (z_1 - 0)\vec{k}$$
$$= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OQ} \qquad (O \text{ มอง } Q)$$
$$= (x_2 - 0)\vec{i} + (y_2 - 0)\vec{j} + (z_2 - 0)\vec{k}$$
$$= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

อาศัยการบวกเวกเตอร์โดยการเขียนรูปจะได้

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \overrightarrow{PQ}$$
$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (P \text{ มอง } Q)$$
$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$ (ตำแหน่งสุดท้ายลบตำแหน่งตั้งต้น)

ตัวอย่างที่ 2.6 จากรูปที่ 2.17 เวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ มีขนาด 100 หน่วย โดยแนวของเวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ ผ่านจุด $(3,4,5)$ หน่วย เวกเตอร์ $\overrightarrow{OR}$ มีขนาด 25 หน่วยบนแกน x และเวกเตอร์ $\overrightarrow{OQ}$ มีขนาด 50 หน่วยบนแกน z จงหา $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OQ}$



รูปที่ 2.17

วิธีทำ คำนวณโดยใช้ **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (unite vector)

สมมติให้ A อยู่ที่จุด (3,4,5)

$$\overrightarrow{OA} = OA\vec{e} \quad \text{และ}$$
$$\overrightarrow{OP} = OP\vec{e}$$

$$\overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$
$$= 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$
$$|\overrightarrow{OA}| = OA = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \quad \text{หน่วย}$$
$$= \sqrt{50} \quad \text{หน่วย}$$

แต่ $$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{OA}}{|OA|} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{50}} \quad \text{หน่วย}$$

ดังนั้น $$\overrightarrow{OP} = OP\vec{e} = 100\left(\frac{3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{50}}\right) \text{หน่วย}$$

$$\overrightarrow{OR} = 25\vec{i}$$
$$\overrightarrow{OQ} = 50\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{300}{\sqrt{50}} + 25\right)\vec{i} + \left(\frac{400}{\sqrt{50}}\right)\vec{j} + \left(\frac{500}{\sqrt{50}} + 50\right)\vec{k}$$

คำนวณโดยใช้**โคไซน์บอกทิศ** (direction cosine)

$$\overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$
$$= 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$
$$|\overrightarrow{OA}| = OA = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \quad \text{หน่วย}$$
$$= \sqrt{50} \quad \text{หน่วย}$$

เมื่อ $$\overrightarrow{OA} = OA\cos\theta_x\vec{i} + OA\cos\theta_y\vec{j} + OA\cos\theta_z\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OP} = OP\cos\theta_x\vec{i} + OP\cos\theta_y\vec{j} + OP\cos\theta_z\vec{k}$$

แต่ $\cos\theta_x = \frac{(OA)_x}{OA} = \frac{3}{\sqrt{50}}$ หน่วย

$\cos\theta_y = \frac{(OA)_y}{OA} = \frac{4}{\sqrt{50}}$ หน่วย

$\cos\theta_z = \frac{(OA)_z}{OA} = \frac{5}{\sqrt{50}}$ หน่วย

จากโจทย์ $OP = 100$ หน่วย

ดังนั้น $\overrightarrow{OP} = 100\left(\frac{3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}}{\sqrt{50}}\right)$ หน่วย

$\overrightarrow{OR} = 25\vec{i}$

$\overrightarrow{OQ} = 50\vec{k}$

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{300}{\sqrt{50}}+25\right)\vec{i}+\left(\frac{400}{\sqrt{50}}\right)\vec{j}+\left(\frac{500}{\sqrt{50}}+50\right)\vec{k}$$

2.6 การคูณเวกเตอร์

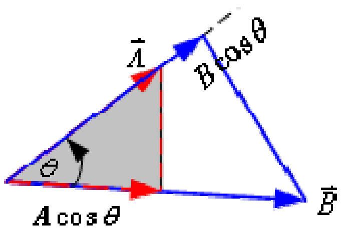
การคูณเวกเตอร์มี 2 ชนิดได้แก่

ก. ผลคูณที่ได้เป็นปริมาณสเกลาร์ เรียกว่าผลคูณแบบดอท (dot product) หรือผลคูณสเกลาร์ (scalar product)

ข. ผลคูณที่ได้เป็นปริมาณเวกเตอร์ เรียกว่าผลคูณแบบครอส (cross product) หรือผลคูณเวกเตอร์ (vector)

ให้ $\vec{A} = A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$

$\vec{B} = B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$



รูปที่ 2.18

ผลคูณสเกลาร์ :

$\vec{A}\bullet\vec{B} = AB\cos\theta$

$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

(เพราะว่า $\vec{i}\bullet\vec{i} = \vec{j}\bullet\vec{j} = \vec{k}\bullet\vec{k} = 1$ และ

$\vec{i}\bullet\vec{j} = \vec{j}\bullet\vec{k} = \vec{k}\bullet\vec{i} = 0$)

เมื่อ A และ B คือขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เมื่อ $0^0 \le \theta \le 180^0$

จากรูปที่ 2.18 เงาของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ คือ $A\cos\theta$ และ เงาของ $\vec{B}$ บน $\vec{A}$ คือ $B\cos\theta$ นั่นคือผลคูณสเกลาร์คือการคูณเวกเตอร์กับเงาของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

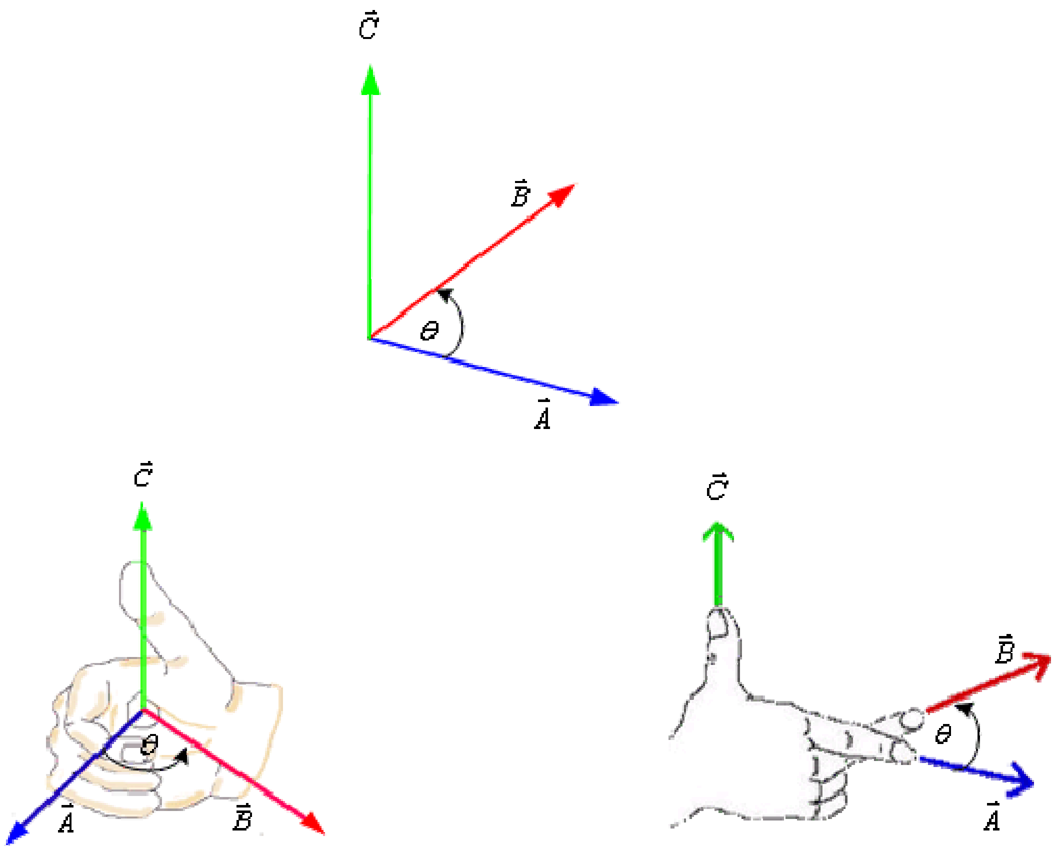
ผลคูณเวกเตอร์ :

$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}$

$= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_z)\vec{k}$

เมื่อ $\vec{C}$ คือเวกเตอร์ผลลัพธ์ทิศของเวกเตอร์ $\vec{C}$ หาได้โดยใช้กฎมือขวาเมื่อ $180^0 \le \theta \le 0^0$ แสดงดังรูปที่ 2.19 เพื่อความสะดวกในการคำนวณเราสามารถหาผลคูณแบบเวกเตอร์ได้โดยใช้เมตริกซ์

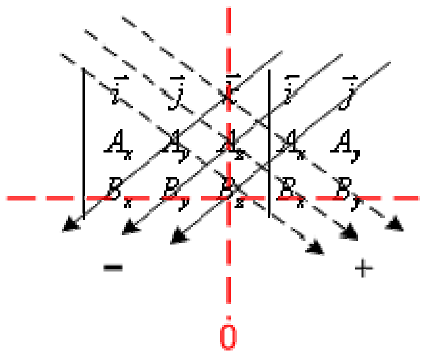
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



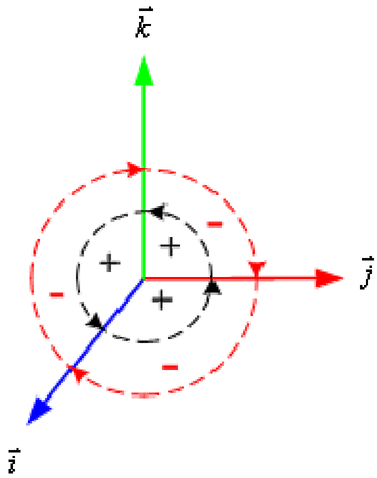
รูปที่ 2.19

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{matrix}\right|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{matrix}$$

=



การพิจาณาเครื่องหมายผลคูณเวกเตอร์พิจารณาโดยการตั้งแกนแบ่งครึ่งทั้งสองข้างให้เท่ากันค่าทางซ้ายเครื่องหมายลบ ค่าทางขวาเครื่องหมายบวกตามระบบแกน



รูปที่ 2.20

หรือการพิจาณาเครื่องหมายผลคูณเวกเตอร์ดังรูปที่ 2.20 ทิศทวนเข็มเครื่องหมายบวก ทิศตามเข็มเครื่องหมายลบเมื่อ

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$; $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$; $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$; $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$;
$\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$; $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$

ตัวอย่างที่ 2.6 พิจารณาเวกเตอร์ $\vec{A}=40\vec{i}+20\vec{j}$ และ $\vec{B}=-30\vec{i}+10\vec{j}$ จงหา

ก. ผลคูณสเกลาร์
ข. ผลคูณเวกเตอร์
ค. มุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

วิธีทำ

ก.
$$\vec{A}\bullet\vec{B} = \left(40\vec{i}+20\vec{j}\right)\bullet\left(-30\vec{i}+10\vec{j}\right)$$
$$= (40)(-30)\bullet(20)(10)$$
$$= -1000$$

ข.
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 40 & 20 & 0 \\ -30 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 40 & 20 & 0 & 40 & 20 \\ -30 & 10 & 0 & -30 & 10 \end{array}\right.$$

$$= 0\vec{i}+0\vec{j}+\{(40)(10)-(20)(-30)\}\vec{k}$$

$$= 1000\vec{k}$$

ผลคูณแบบเวกเตอร์ $\vec{A}\times\vec{B}$ มีขนาด 1000 หน่วย ทิศตามแกน z

ค. $\vec{A} \bullet \vec{B} = AB\cos\theta$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{AB}$$

$$= \cos^{-1}\frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{-1000}{\sqrt{40^2 + 20^2}\sqrt{(-30)^2 + 10^2}}$$

$$= 135^0$$

สรุป

ระบบพิกัดฉาก มีความสำคัญ และใช้ในการระบุตำแหน่ง

เวกเตอร์ แสดงตำแหน่งและทิศทาง

ส่วนประกอบเวกเตอร์ : $A_x = A\cos\theta$ และ $A_y = A\sin\theta$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย : $A = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

การบวกเวกเตอร์ : $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ เมื่อ $R_x = A_x + B_x$ และ $R_y = A_y + B_y$

ผลคูณสเกลาร์ : $\vec{A} \bullet \vec{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

ผลคูณเวกเตอร์ : $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$